5 コーシー列／有理数の稠密性 の解答例

※ 以下の解答例において, 3 問とも (1) にはアルキメデスの原理を用いています.

演習 5.1 (1) $^\forall\varepsilon > 0$ に対し, $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となるような自然数 N をとる. $m > n \geq N$ を満たす任意の自然数 n, m について, $\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N}$ だから,

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-2)(m-1)} + \frac{1}{(m-1)m} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon
\end{aligned}$$

となる. よって $\{a_n\}$ はコーシー列である.

[(1) の別解 (大音, 関根)]

$$a_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

より, $\{a_n\}$ は有界な非減少数列である. 従って, 実数の連続性により $\{a_n\}$ は収束する. $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく[1]. すると, 極限の定義により, $^\forall\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成立する. このとき, もし $n, m \geq N$ ならば,

$$n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) + (\alpha - a_n)| \leq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

よって, $\{a_n\}$ はコーシー列である.

(2) $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ とする. $^\forall N \in \mathbb{N}$ に対し, $n \geq N$ なる自然数 n をとり $m = 2n$ とすると,

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m} > \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

よって, $\{a_n\}$ はコーシー列ではない.

[1]実はこの極限値は $\alpha = \frac{\pi^2}{6}$ であることが知られています.

[(2) の別解 (花城)] $\varepsilon = 1$ とし, ${}^\forall N \in \mathbb{N}$ に対し, $n = [eN + e]$ ($eN + e$ を超えない最大の自然数), $m = N$ とおくと,

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \right| \\ &\geq \int_{m+1}^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1) - \log(m+1) \\ &\geq \log\{(eN + e - 1) + 1\} - \log(N+1) = 1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より, $\{a_n\}$ はコーシー列ではない.

注意 1. 演習 5.1 (1) で, 「$a_m < 2 - \dfrac{1}{m}$ と $a_n < 2 - \dfrac{1}{n}$ により

$$|a_m - a_n| < \left| \left(2 - \frac{1}{m}\right) - \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right| = \left| -\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right|$$

となる」としている人がけっこういたのですが, 一般に, $x < y$ かつ $z < w$ であっても $|x - z| < |y - w|$ となるとは限らない (例えば $x = 2$, $y = 5$, $z = 4$, $w = 6$ のとき) ので, 証明になっていないと思います.

演習 5.2 (1) ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対して, $e^\varepsilon > 1$ より, $N > \dfrac{1}{e^\varepsilon - 1}$ となる自然数 N が存在する. このとき

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < e^\varepsilon - 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n} < e^\varepsilon \Rightarrow |a_{n+1} - a_n| = \log \frac{n+1}{n} < \varepsilon.$$

(2) $\varepsilon = 0.1$ とする. ${}^\forall N \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N$ なる自然数 n を適当にとり $m = 2n$ とすれば,

$$|a_m - a_n| = \log \frac{m}{n} = \log 2 > \varepsilon$$

となる. よって, $\{a_n\}$ はコーシー列ではない.

注意 2. 演習 5.1 (2) と 5.2 (2) は「$\{a_n\}$ がコーシー列である」の否定命題

$${}^\exists \varepsilon > 0 \ \text{ s.t. } \ {}^\forall N \in \mathbb{N}, \ \ {}^\exists n, m \geq N \ \text{ s.t. } \ |a_m - a_n| \geq \varepsilon$$

を証明すれば良いわけですが, その証明において, ε を N や n, m に依存するようにとってはいけません (そのようにとってしまっている人がかなり多数いました). 理由は前回の演習 4.1 (3) と同様なのですが, 問題点がよく分からない人は, 例えば次のような偽証明を考えてみてください.

[(偽) 命題] $a_n = \dfrac{1}{n}$ とすると, $\{a_n\}$ はコーシー列ではない.

[(偽) 証明] ${}^\forall N \in \mathbb{N}$ に対し, $\dfrac{1}{N(N+1)} \geq \varepsilon > 0$ となるように実数 ε をとる. このとき $n = N$, $m = N+1$ とすれば,

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)} \geq \varepsilon.$$

よって, $\{a_n\}$ はコーシー列ではない.

演習 5.3 (1) $n > \dfrac{1}{b-a}$ となる自然数 n をとる. すると $1 < nb - na$ である. m を na を超えない最大の整数とすると, $m \leq na < m+1$ より,

$$na < m+1 \leq na+1 < na + (nb - na) = nb$$

を得る. よって, $na < m+1 < nb$ だから, $x = \dfrac{m+1}{n}$ とすれば $a < x < b$ となる.

(2) $a' = a - \sqrt{2}$, $b' = b - \sqrt{2}$ とすると, (1) より, $a' < x < b'$ となる有理数 x が存在する. このとき $y = x + \sqrt{2}$ とすれば y は無理数で, $a < y < b$ を満たす.