4　関数の極限 (その２)

「微積分 III」においては, ε-N 論法, ε-δ 論法, 実数の連続性に関する議論, 等々, 厳密な議論を展開する能力がこれまでよりも必要となってきます. 前回の小テストの結果を見ていて, 少し違った方面から証明の練習をしてみるのも良いのではないかと思いました. 今日は, 前回と同じテーマですが, 「正しい証明を見つける」という問題ではなく, 「間違いを見抜く」という類の問題をやってみましょう.

演習 4.1 下記の (1)〜(3) で与えられている [命題] と [証明] の組について, もし「証明が間違っており, 命題は正しくない」あるいは「命題は正しいが, 証明におかしい部分があって完全ではない」のどちらかであったなら, 証明のどこがどうおかしいのか説明せよ. (どこにもおかしな部分がないと思ったら「おかしい部分はない」と答えて下さい.)

(1) [命題] $\varepsilon = 0.1$ のとき, $\delta = 0.05$ とすれば, $0 < |x| < \delta \Rightarrow |(x-1)^2 - 1| < \varepsilon$.

[証明] $|x| < \delta$ ならば, $|(x-1)^2 - 1| = |x(x-2)| < |\delta(\delta - 2)| = 0.0975 < \varepsilon$. □

(2) [命題] $\lim_{x \to 0} x^3 = 1$.

[証明] もし $0 < \delta < 1$ ならば, $|x| < \delta \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow -2 < x - 1 < 0 \Rightarrow |x-1| < 2$ となる. そこで, ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して $0 < \delta < 1$ かつ $\delta^2 + \delta + 1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす実数 δ をとる. このとき, 三角不等式により $|x^2 + x + 1| \leq |x|^2 + |x| + 1$ となることに注意すれば,

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^3 - 1| = |x-1||x^2+x+1| < 2(|x|^2+|x|+1) < 2(\delta^2+\delta+1) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

を得る. よって, ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して ${}^\exists\delta > 0$ s.t. $0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^3 - 1| < \varepsilon$ となるので, $\lim_{x \to 0} x^3 = 1$ である. □

(3) [命題] $\lim_{x \to 1} x^3 = 1$.

[証明] $c = |x^2 + x + 1|$ とする. ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \varepsilon / c$ とすれば,

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x^3 - 1| = |x-1||x^2+x+1| = c|x-1| < c\delta = \varepsilon$$

を満たす. 以上より, $\lim_{x \to 1} x^3 = 1$. □

※時間が余ったら, 「命題は正しいが, 証明におかしい部分がある」と判断したものについて, 正しい証明を与えてみてください.