4 関数の極限 (その 2) の解説

演習 4.1 実は三つともおかしな部分があります.

(1) 証明中に, $|x| < \delta = 0.05$ という前提のもと $|x(x-2)| < |\delta(\delta-2)|$ としている部分がありますが, これがおかしい. (この部分に違和感を感じていれば, 命題の真偽が分かっていなくても正解とします.)

$|x| < 0.05$ のとき $x-2$ は負の数で, $-x > -0.05$ より $|x-2| = -x+2 > |\delta-2| = 1.95$ だから, $|x(x-2)|$ が $|\delta(\delta-2)|$ 以上になる可能性が残ってしまっており, $|x(x-2)| < |\delta(\delta-2)|$ と主張する根拠が分かりません. (実際にはその主張は誤りで, $-0.05 < x < 1-\sqrt{1.0975} = -0.0476...$ であれば $|x(x-2)| > |\delta(\delta-2)| = 0.0975$ となってしまいます.)

命題の真偽は微妙で分かりづらいのですが, 例えば $x = -0.049$ のとき $|x(x-2)| = 0.100401 > \varepsilon = 0.1$ なので, 実は偽命題です. ($-0.05 < x < 1-\sqrt{1.1} = -0.0488...$ であれば $|x(x-2)| > \varepsilon$.)

(2) 命題は見るからに間違っているので, 証明のどこかにおかしな部分があるはずです. そう思って証明文を追ってみると, どうも「$^\forall\varepsilon > 0$ に対して $0 < \delta < 1$ かつ $\delta^2+\delta+1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす実数 δ をとる」という部分が不明瞭であることに気付くと思います (そのような δ が本当に存在するかどうかが明らかでない).

関数 $y = x^2+x+1$ のグラフを描いてみればすぐに分かりますが, $\{x^2+x+1 \mid x \in \mathbb{R},\ \ x > 0\}$ は下限 1 をもつので, $0 < \varepsilon < 2$ のときに $\delta^2+\delta+1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす正の実数 δ が存在しません.

(3) 命題は正しいのですが, 証明にはおかしいところがあって不完全です. この証明に違和感を感じなかった人は反省しましょう. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c} = \dfrac{\varepsilon}{|x^2+x+1|}$ として, δ を x に依存するようにとっている部分が問題です[1]

$^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0$ s.t. "$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x^3-1| < \varepsilon$" をもう少しだけ厳密に書けば,

$$^\forall\varepsilon > 0,\quad {}^\exists\delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{“}0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x^3-1| < \varepsilon\text{”})$$

となります. 変数 x が出てきてよいのは (......) の中だけです. カッコの外にある δ を x に依存するようにとってしまっては証明になりません. これだけでは問題点が分か

[1] $|x^2+x+1|$ を c とおいて定数のように見せかけているところがいやらしいので,「$c = |x^2+x+1|$ とする」という部分を問題視している人もいましたが, 別に c が定数だとは言っていないので, このようにおくこと自体はたいした問題ではありません. 本質的に問題があるのは 「$\delta = \varepsilon/c$」の部分です.

りづらい人もいると思いますが, そのような証明を許してしまうと, 例えば次のような偽命題も証明できてしまうことになります:

[(偽) 命題] $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 0$.

[(偽) 証明] ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対し,

$$\delta = \begin{cases} \varepsilon|x| & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすれば,

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < |x| < \varepsilon|x| \Rightarrow \frac{|x|}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

よって, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 0$.

注意 1. (1) で,「$0 < |x| < \delta$ のとき $|(x-1)^2 - 1| < 0.1025$ となり, $0.1025 > \varepsilon$ なので命題は正しくない」という答えを書いている人が何人かいたのですが,$|(x-1)^2 - 1| < 0.1025$, $0.1025 > \varepsilon$ だからといって $|(x-1)^2 - 1| < \varepsilon$ が成り立たないという保証はありません. (実際, $0 < |x| < \delta$ かつ $|(x-1)^2 - 1| < \varepsilon$ となる x はいくらでも存在する.) 命題が正しくないことをいうには, $0 < |x| < \delta$ かつ $|(x-1)^2 - 1| \geq \varepsilon$ となるような x が実際に存在することを示す必要があります.

また,「証明のどこがどうおかしいのか説明せよ」という問題なので, 命題が正しくないというだけでは答えとしては不十分です.

注意 2. 上記より少し良い答えとして,「${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して, "$0 < |x| < \delta \Rightarrow |(x-1)^2 - 1| < \varepsilon$" を満たす $\delta > 0$ は $\delta^2 + 2\delta < \varepsilon$ という条件を満たしていなければならない」ということを示した上で,「しかし, $\delta = 0.05$ とすると $\delta^2 + 2\delta = 0.1025 > \varepsilon$ となってしまい, 不適切である」としているものもありました. ただ, これも証明のどこが間違っているかを直接指摘しているわけではないので, 準正解という扱いになっています.

注意 3. (2) で「$-2 < x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| < 2$」の部分を問題視している人が何人かいましたが, これは丁寧に書くと「$-2 < x - 1 < 0 \Rightarrow -2 < x - 1 < 2 \Rightarrow |x - 1| < 2$」ということなので, まったくおかしくはありません. (問題があるのは「$|x - 1| < 2 \Rightarrow -2 < x - 1 < 0$」の方です. 矢印の向きに注意しましょう.) この件以外にも「$P \Rightarrow Q$」「$P \Leftarrow Q$」「$P \Leftrightarrow Q$」をごっちゃに考えている人がまだ多いように思えます. これらは意味が異なるので, しっかり区別して使い分けないと正しい推論などできないので気をつけてください.

(3) の正しい証明については次ページを参照してください.

(3) の正しい証明 (例). $0 < \delta \leq 1$ とすると, $\delta^2 + 3\delta + 3 \leq 1 + 3 + 3 = 7$ だから, ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \mathrm{Min}\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$ とすれば, $0 < |x-1| < \delta$ のとき,

$$\begin{aligned}
|x^3 - 1| &= |x-1||x^2 + x + 1| \\
&= |x-1||(x-1)^2 + 3(x-1) + 3| \\
&\leq |x-1|(|x-1|^2 + 3|x-1| + 3) \\
&< \delta(\delta^2 + 3\delta + 3) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^3 = 1$. □

注意 4. 上記で, 「${}^\forall\varepsilon > 0$ に対し, $\delta^3 + 3\delta + 3 < \varepsilon$ となるような正の数 δ をとる」とだけ書いてある人が非常に多かったのですが, このような δ が存在するかどうかはあまり明らかでないので, もう少し説明がほしかったところです. (つまり (2) とは違って実際に存在するのだ, という保証がほしい.)

説明を書いている人では $f(x) = x^3 + 3x + 3$ のグラフを描いている人が多かったです (それだと暗黙に中間値の定理を使っているかも).