3 関数の極限

演習 3.1 $f(x) = x^2$ とする.

(1) $a = 2$, $\varepsilon = 0.1$ に対して, "$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$" を満たすような正の実数 δ を求めよ.

(2) $a = -3$ とする. 任意の正の数 $\varepsilon > 0$ が与えられたときに, これに対して "$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$" を満たすような正の実数 δ をどのようにとれば良いか述べて, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ を証明せよ.

(3) 任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ について, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となることを (上記のような ε-δ 論法で) 証明せよ.

(4) 任意の正の実数 $M > 0$ が与えられたときに, ある $K > 0$ があって $x > K \Rightarrow f(x) > M$ となること (つまり $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$) を示せ.

[ヒント] 三角不等式 $|A + B| \leq |A| + |B|$ より, $|x + a| \leq |x| + |a|$, $|x| = |(x - a) + a| \leq |x - a| + |a|$.

演習 3.2 (1) ε-δ 論法により, $\lim_{x \to 0} \sqrt{1 + x} = 1$ を示せ.

(2) 上の (1) と教科書の定理 7.5 を使って, 極限値 $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + x}}{x}$ を求めよ.

※今回は特別扱いの問題はありません.