3 関数の極限 の解答例

演習 3.1 (1) $|x^2-2^2|<\varepsilon=0.1 \Leftrightarrow -0.1<x^2-4<0.1 \Leftrightarrow 3.9<x^2<4.1$ $\Leftarrow \sqrt{3.9}<x<\sqrt{4.1}$ だから, $\delta=\mathrm{Min}\{2-\sqrt{3.9},\ \sqrt{4.1}-2\}$ $(=\sqrt{4.1}-2)$ とすれば,

$$\begin{aligned}0<|x-2|<\delta &\Rightarrow -\delta<x-2<\delta \Rightarrow -2+\sqrt{3.9}<x-2<\sqrt{4.1}-2\\ &\Rightarrow \sqrt{3.9}<x<\sqrt{4.1} \Rightarrow |x^2-2^2|<\varepsilon.\end{aligned}$$

(δ は $\sqrt{4.1}-2$ 以下の正の実数であれば何でも良い.)

(2) もし $9-\varepsilon \geq 0$ ならば, $|x^2-(-3)^2|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x^2-9<\varepsilon \Leftrightarrow 9-\varepsilon<x^2<9+\varepsilon$ $\Leftarrow -\sqrt{9+\varepsilon}<x<-\sqrt{9-\varepsilon}$ だから, $\delta=\mathrm{Min}\{\sqrt{9+\varepsilon}-3,\ 3-\sqrt{9-\varepsilon}\}$ $(=\sqrt{9+\varepsilon}-3$ となる (下の別解 2 を参照)) とおけば,

$$\begin{aligned}0<|x+3|<\delta &\Rightarrow -\delta<x+3<\delta \Rightarrow -\sqrt{9+\varepsilon}+3<x+3<3-\sqrt{9-\varepsilon}\\ &\Rightarrow -\sqrt{9+\varepsilon}<x<-\sqrt{9-\varepsilon} \Rightarrow |x^2-(-3)^2|<\varepsilon.\end{aligned}$$

また, $9-\varepsilon<0$ のときは, 例えば $\delta=3\sqrt{2}-3$ (上で $\varepsilon=9$ としたときの δ の値) とすれば, $0<|x+3|<\delta \Rightarrow |x^2-(-3)^2|<9<\varepsilon$ となる.

よって, ${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対して, 条件を満たす $\delta>0$ が存在するので, $\lim_{x\to -3} f(x)=f(-3)=9$ が証明できた.

※ 上の (1)(2) の解答例としては, とりあえず素朴な方針でやったものを書きましたが, もちろん下記 (3) にいくつか書いてある別解などと同様にすることもできます.

(3) 一般に, 三角不等式により $|x+a| \leq |x-a|+2|a|$ となるから,

$$|x^2-a^2|=|x-a||x+a| \leq |x-a|(|x-a|+2|a|).$$

一方, 2 次不等式を解くと, $|x-a|(|x-a|+2|a|)<\varepsilon \Leftrightarrow |x-a|<\sqrt{a^2+\varepsilon}-|a|$ となるから, ${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対して $\delta=\sqrt{a^2+\varepsilon}-|a|$ とすれば, $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |x^2-a^2|<\varepsilon$ を満たす. よって $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

(別解 1) もし $0<\delta \leq 1$ ならば $|x-a|<\delta$ のとき $|x-a|+2|a|<\delta+2|a| \leq 2|a|+1$ となるから, ${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対して $\delta=\mathrm{Min}\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{2|a|+1}\right\}$ とおけば,

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |x^2-a^2| \leq |x-a|(|x-a|+2|a|)<|x-a|(2|a|+1)<\delta(2|a|+1) \leq \varepsilon.$$

よって $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

(別解 2) ${}^\forall\varepsilon$ に対して, もし $a^2 \geq \varepsilon$ ならば,

$$(\sqrt{a^2-\varepsilon}+\sqrt{a^2+\varepsilon})^2 = 2a^2 + 2\sqrt{a^4-\varepsilon^2} < 2a^2 + 2\sqrt{a^4} = 4a^2.$$

よって, $\sqrt{a^2-\varepsilon}+\sqrt{a^2+\varepsilon} < 2|a|$, 従って

$$\sqrt{a^2+\varepsilon} - |a| < |a| - \sqrt{a^2-\varepsilon}$$

を得る．そこで $\delta = \sqrt{a^2+\varepsilon} - |a|$ とおけば, (1)(2) と同様にして ($a > 0$ のときは (1), $a \leq 0$ のときは (2)), $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$ となる．($a^2 < \varepsilon$ の場合は $\delta = |a|\sqrt{2} - |a|$ とすればよい.)

(4) $K = \sqrt{M}$ とすれば $x > K \Rightarrow x^2 > M$.

演習 3.2 (1) $0 < \varepsilon \leq 1$ のとき, $|\sqrt{1+x} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \sqrt{1+x} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt{1+x} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow (1-\varepsilon)^2 < 1 + x < (1+\varepsilon)^2 \Leftrightarrow \varepsilon^2 - 2\varepsilon < x < \varepsilon^2 + 2\varepsilon$ で, $|\varepsilon^2 - 2\varepsilon| \leq |\varepsilon^2 + 2\varepsilon| + |-4\varepsilon| < \varepsilon^2 + 2\varepsilon$ だから, $\delta = |\varepsilon^2 - 2\varepsilon|$ とすれば, $0 < |x| < \delta \Rightarrow |\sqrt{1+x} - 1| < \varepsilon$ となる．$\varepsilon > 1$ のときは, $\delta = 1$ とすれば, 上の議論により, $0 < |x| < \delta \Rightarrow |\sqrt{1+x} - 1| < 1 < \varepsilon$ となることが分かる．よって, $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x} = 1$ が証明できた.

(2) $(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x}) = -x$ に注意すれば, 上の (1) と教科書の定理 7.5 を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2}$$

を得る.