2　数列の極限 (その２)

前回の問題や教科書の定理 (特に定理 7.3, 7.4) は使ってかまいません.

演習 2.1 r を $0 \leq r < 1$ となる実数とする.

(1) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ を証明せよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ について, ある自然数 M が存在して, $n \geq M$ なるすべての n について $|a_{n+1}| \leq r|a_n|$ であったとする. このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ.

(3) 正の数列 $\{a_n\}$ が, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ を満たすとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ.

(ヒント) (1) $r = 0$ のときは明らか. $0 < r < 1$ のとき, $1/r > 1$ より $1/r = 1 + h$ となる正の実数 h がある. ２項定理を使うと $1/r^n = (1+h)^n > nh$ がいえる.

(2)(3) 絶対値のついた条件は $|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$ のように書き換えた方が便利なことがあります.

演習 2.2 (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ を証明せよ.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ を証明せよ.

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 2.3 (1) $a > 0$ のとき, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ を示せ.

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示せ.