2 数列の極限 (その 2) の解答例

演習 2.1 (1) $r = 0$ のときは明らか. 以下, $0 < r < 1$ の場合を示す. $1/r > 1$ だから, $1/r = 1 + h$ となる正の実数 $h > 0$ が存在する. すると, 2 項定理により $1/r^n = (1+h)^n = 1 + nh + \cdots > nh$. よって $r^n < \dfrac{1}{nh}$ となる.

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, (アルキメデスの原理により) $\dfrac{1}{\varepsilon h} < N$ となる自然数 N がとれて,

$$n \geq N \Rightarrow r^n < \frac{1}{nh} \leq \frac{1}{Nh} < \varepsilon.$$

よって, 収束の定義により, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

(2) 仮定より, $n \geq M + 1$ であれば,

$$|a_n| \leq r|a_{n-1}| \leq \cdots \leq r^{n-M}|a_M|.$$

よって,

$$-r^{n-M}|a_M| \leq a_n \leq r^{n-M}|a_M|.$$

(1) と教科書の定理 7.3 より,

$$\lim_{n\to\infty} r^{n-M}|a_M| = r^{-M}|a_M| \lim_{n\to\infty} r^n = 0.$$

同様に, $\lim_{n\to\infty} -r^{n-M}|a_M| = 0$ だから, 定理 7.4 (はさみうちの原理) により, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を得る.

(3) $r + \varepsilon < 1$ となるような正の数 ε をとり, 固定する (例えば $\varepsilon = \dfrac{1-r}{2}$ とする). $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ より, その ε に対して, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\begin{aligned} n \geq M \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad a_{n+1} < (r+\varepsilon)a_n \end{aligned}$$

となる. $\{a_n\}$ は正の数列で, $0 \leq r + \varepsilon < 1$ だから, (2) で r を $r + \varepsilon$ に置き換えた条件が満たされている. よって, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

演習 2.2 (1) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ とすると, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ である．教科書の定理 7.3 により,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}.$$

よって, 演習 2.1 (3) により, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ とすると, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{n+1}$ より, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ を得る．よって, 演習 2.1 (3) により, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

演習 2.3 (1) $a > 1$ のとき, $\sqrt[n]{a} > 1$ だから, $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ となる正の数列 $\{h_n\}$ がとれる．2 項定理より, $a = (1+h_n)^n > nh_n$. よって, $h_n < \dfrac{a}{n}$. すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $N > \dfrac{a}{\varepsilon}$ となる自然数 N がとれて,

$$n \geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{a} - 1| = |h_n| < \frac{a}{n} \leq \frac{a}{N} < \varepsilon.$$

よって, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

$0 < a < 1$ のとき, $\dfrac{1}{a} > 1$ だから, 上記より, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$ を得る．よって, 教科書の定理 7.3 により,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = 1.$$

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 2 項定理により, $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \cdots$ だから,

$$\frac{n-1}{2}\varepsilon^2 < \frac{(1+\varepsilon)^n}{n}$$

を得る．そこで, $\dfrac{2}{\varepsilon^2} + 1 < N$ となる自然数 N をとれば,

$$\begin{aligned} n \geq N \quad &\Rightarrow \quad 1 < \frac{N-1}{2}\varepsilon^2 \leq \frac{n-1}{2}\varepsilon^2 < \frac{(1+\varepsilon)^n}{n} \Rightarrow n < (1+\varepsilon)^n \Rightarrow \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon \end{aligned}$$

となる ($\sqrt[n]{n} \geq 1$ に注意). よって $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.