1 数列の極限

演習 1.1 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ によって定める.

(i) $\varepsilon = 0.1$ に対して, "$n \geq N \Rightarrow |1 - a_n| < \varepsilon$" を満たす自然数 N を見つけよ.

(ii) $\varepsilon = 0.01$ に対して, "$n \geq N \Rightarrow |1 - a_n| < \varepsilon$" を満たす自然数 N を見つけよ.

(iii) 任意に実数 $\varepsilon > 0$ をとったとき, ε に対して "$n \geq N \Rightarrow |1 - a_n| < \varepsilon$" を満たす自然数 N をどのように見つければよいか述べ, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を証明せよ.

演習 1.2 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ によって定める.

(i) $M = 100$ に対して, "$n \geq N \Rightarrow a_n > M$" を満たす自然数 N を見つけよ.

(ii) 任意に実数 $M > 0$ をとったとき, M に対して "$n \geq N \Rightarrow a_n > M$" を満たす自然数 N をどのように見つければよいか述べ, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ を証明せよ.

(ヒント) $n^2 = (n+1)^2 - 2(n+1) + 1$.

演習 1.3 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を $a_n = (-1)^n$ によって定める.

(i) $a = 1.2$ に対して, "${}^\forall N \in \mathbb{N}, {}^\exists n \geq N$ s.t. $|a - a_n| \geq \varepsilon$" を満たす正の実数 ε を見つけよ.

(ii) $a = -0.3$ に対して, "${}^\forall N \in \mathbb{N}, {}^\exists n \geq N$ s.t. $|a - a_n| \geq \varepsilon$" を満たす正の実数 ε を見つけよ.

(iii) 任意に実数 a をとったとき, a に対して "${}^\forall N \in \mathbb{N}, {}^\exists n \geq N$ s.t. $|a - a_n| \geq \varepsilon$" を満たす正の実数 ε をどのようにとればよいか述べ, 数列 $\{a_n\}$ が発散することを証明せよ.

(iv) さらに, 数列 $\{a_n\}$ は $+\infty$ にも $-\infty$ にも発散しないこと (振動すること) を証明せよ.

(ヒント) 最後の (iv) は「$\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散する」「$\{a_n\}$ が $-\infty$ に発散する」という命題の否定命題を作ってそれを示す.

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 1.4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ を証明せよ.

(ヒント) $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (n+1) - n = 1$.