# 10 固有値・固有ベクトルの応用

**演習 10.1** (行列の対角化) $n$ 次の正方行列 $A$ に対して, ある正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, $A$ は対角化可能であるという.

(1) もし $A$ が正則行列 $P$ を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化されるなら, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は $A$ の固有値であり, $P$ の各列は固有ベクトルであることを示せ. (ヒント: 両辺に左から $P$ をかける.)

(2) 逆に, $n$ 個の線形独立な $A$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在すれば, $P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ によって $A$ は対角化可能であることを示せ. (ヒント: (1) の議論を逆にたどる.)

(3) 次の行列が対角化可能かどうかを調べて, もし可能ならば対角化せよ.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

---

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください.

**演習 10.2** (線形微分方程式) 変数 $t$ の関数 $y_1(t), y_2(t)$ に関する連立微分方程式:

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases} \qquad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

を考える.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすれば, 上記の微分方程式は $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ と書ける.

(1) 微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ が

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad (\lambda, x_1, x_2 \text{ は定数})$$

という形の解を持つためには, $\lambda$ は $A$ の固有値で, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が ($\lambda$ に対する) $A$ の固有ベクトルであることが必要十分であることを確かめよ.

(2) $A$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2$ として, それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が得られたとき, もし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が線形独立なら, 上記の微分方程式の一般解として

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の定数})$$

が得られる. そこで, 実際に次の微分方程式の一般解を求めてみよ:

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 5y_2 \end{cases} .$$

(3) (2) の微分方程式を初期条件 $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = 0$ のもとで解け. (初期条件を満たすように $c_1, c_2$ を決定せよ.)