9 固有値・固有ベクトル の解答例

演習 9.1 計算ミスをしている人が非常に多かったので, 返却された答案をよく見直しておいてください. (下記で, c, c_1, c_2 は, $c \neq 0$, $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ を満たす任意の定数.)

(i) $3,\ c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $4,\ c\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ (ii) $\sqrt{-1},\ c\begin{pmatrix}1\\\sqrt{-1}\end{pmatrix}$; $-\sqrt{-1},\ c\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{-1}\end{pmatrix}$

(iii) $-3,\ c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $7,\ c\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$; $1,\ c\begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix}$

(iv) $3,\ c\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$; $-3,\ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

※今回は「すべての固有ベクトルを求めよ」という問題文ではなかったので, 各固有値に対する固有ベクトルを一つずつでも求めていれば一応正解ということになるのですが, 上記のような一般的な形で答えるほうが望ましかったです.

演習 9.2 (i) $\Phi_{{}^tA}(x) = |xE - {}^tA| = |{}^t(xE - A)| = |xE - A| = \Phi_A(x)$ となって, 両者の固有多項式が一致するので, その根である固有値も一致する.

(ii) 固有値 r に対する A の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ とすると $A\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{v}$ だから, この両辺に左から A^{-1} をかけて,

$$\boldsymbol{v} = rA^{-1}\boldsymbol{v}$$

を得る. ここで, もし $r = 0$ とすると, 上の式より $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となってしまい $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ に矛盾するから, $r \neq 0$ である. また, さらに上の式の両辺に $1/r$ をかければ

$$(1/r)\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{v}$$

となるので, $1/r$ は A^{-1} の固有値であることがいえる.

注意 1. 演習 9.2 (ii) の証明で, x を A^{-1} の固有値とするとき, $|xE - A^{-1}| = 0$ から $|xA - E| = 0$, さらに $|rE - rxA| = 0$ を導いて, 「$|rE - A| = 0$ と $|rE - rxA| = 0$ を比較して $rx = 1$ を得る」としている人が何人かいたのですが, この二式から $rx = 1$ を結論づけることはできません. (例えば, $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\-3 & 6\end{pmatrix}$ のとき, $r = 3$, $x = 1/4$ としても二つの式は成立しますし.)

注意 2. 「$A \neq O$ かつ $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ ならば $A\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$」という主張を暗黙のうちに使っているらしい人がかなり多数いたのですが, これは一般には成立しません. 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の場合を考えてみてください. (この場合 $\boldsymbol{v}$ は A の固有値 0 に対する固有ベクトル.)

演習 9.3 ((a) $\Rightarrow$ (b)) r を A の任意の固有値, $\boldsymbol{v}$ を r に対する A の固有ベクトルとする. $A\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{v}$ より, $A^2\boldsymbol{v} = rA\boldsymbol{v} = r^2\boldsymbol{v}$ で, これを繰り返せば,

$$A^n\boldsymbol{v} = r^n\boldsymbol{v}$$

を得る. しかし, $A^n = O$ だから, 結局 $r^n\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となる. これと $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ より $r^n = 0$, よって, $r = 0$ を得る.

((b) $\Rightarrow$ (a)) A の固有値が 0 のみであるということは, A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ の根がすべて 0 であるということだから, ($\Phi_A(x)$ が最高次係数 1 の n 次多項式であることと因数定理より) $\Phi_A(x) = x^n$. よって, ハミルトン・ケーリーの定理により $A^n = O$.