

8 多項式と行列 (その 2) / 固有多項式

演習 8.1 次の行列式を因数分解せよ.

$$(i) \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad (ii) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x & 1 \\ x & x & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix}$$

演習 8.2 正方行列 A に対し, $\Phi_A(x) = |xE - A|$ を A の固有多項式という. 次の行列の固有多項式を求めよ (計算結果は因数分解してもしなくても良いです¹).

$$(i) \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad (ii) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (iv) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 8.3 K を複素数体 \mathbb{C} または \mathbb{R} とし, $K[x]$ を K 係数の一変数多項式全体 (多項式環) とする. A を $K[x]$ の元を成分とする n 次正方行列とすると, 次の (a), (b) が同値であることを示せ:

- (a) $K[x]$ の元を成分とする n 次正方行列 B が存在して $AB = BA = E$,
- (b) ある 0 でない定数 $c \in K$ が存在して $\det A = c$.

¹しかし, もし余裕があれば方程式 $\Phi_A(x) = 0$ を解いて固有値を求めたり, 固有ベクトルを求めたりしてみてください.