8 多項式と行列 (その 2)/固有多項式 の解答例

演習 8.1 (i) $2x(x-2)$ (ii) $(x-1)^4$

演習 8.2 計算ミスをしている人が非常に多かったので, 返却された答案をよく見直しておいてください.
(i) $(x+1)(x-2)$ (ii) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (iii) $x(x+1)(x-3)$ (iv) $(x+1)(x^2-2x-1)$

固有値・固有ベクトルの組は次の通り (c は 0 でない任意の定数):

(i) $2,\ c\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; $-1,\ c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (ii) $1,\ c\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $2,\ c\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$; $-3,\ c\begin{pmatrix}3\\-7\\-8\end{pmatrix}$

(iii) $0,\ c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $-1,\ c\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$; $3,\ c\begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix}$

(iv) $-1,\ c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $1+\sqrt{2},\ c\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}$; $1-\sqrt{2},\ c\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}$

演習 8.3 ちょっと概念的に難しかったのか, 問題文を誤読しているらしい人が多かったです (裏面の注意を参照).

((a) $\Rightarrow$ (b)) $f(x)=\det A$, $g(x)=\det B$ とすると, $AB=E$ より,

$$\det(AB)=f(x)g(x)=\det E=1.$$

$n_1=\deg f$, $n_2=\deg g$ とすると, 上の式より,

$$0=\deg 1=\deg(fg)=n_1+n_2$$

となるが, n_1,n_2 は非負整数のはずだから, これは $n_1=n_2=0$ のときしかありえない. よって, ある定数 $c,c'\in K$ が存在して, (多項式として) $f(x)=c$, $g(x)=c'$ となる. しかも $cc'=1$ だから, $c\neq 0$.

((b) $\Rightarrow$ (a)) A の余因子行列を $\tilde{A}$ とすると, $\tilde{A}$ は $K[x]$ の元を成分とする行列で, $A\tilde{A}=\tilde{A}A=(\det A)E=cE$ を満たす. よって,

$$B=\frac{1}{\det A}\tilde{A}=\frac{1}{c}\tilde{A}$$

とすればよい. □

注意 1. 問題文 (b) の「$\det A = c$」というのは, 両者が “多項式として” 等しい, という意味です. 一般に, $f(x)$ を多項式, $c \in K$ を定数とするとき, 次の二つは異なる命題です:

- 多項式として $f(x) = c$ ($\Rightarrow {}^\forall x \in K,\ f(x) = c$).
- ${}^\exists x \in K,\ f(x) = c$.

例えば, $f(x) = x + 1$, $c = 2$ とすると, 後者は成立しますが前者は成立しません. (a) $\Rightarrow$ (b) の証明で, この二つを混同しているらしい人がけっこういたので, 注意してください.

注意 2. 演習 8.3 で難しいのは, $K[x]$ では足し算, 引き算, 掛け算は自由にできるけれども, 割り算は自由にできない, という点です (多項式を多項式で割っても多項式になるとは限らない). 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると, $\det A = x \neq 0$ で, A の「逆行列」を

$$A^{-1} = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 2 & -x \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/x & -1 \\ -1/x & 1 \end{pmatrix}$$

のように考えることはできるわけですが, これは「$K[x]$ の元を成分とする行列」にはならないので, (a) の条件を満たしません. (b) $\Rightarrow$ (a) の証明で, 単に「$\det A \neq 0$ だから A は正則行列. よって $B = A^{-1}$ とすればよい」としている人が多かったのですが, A^{-1} の成分がすべて多項式であることを (b) によって保証してほしかったところです.

(a), (b) を満たす行列としては, 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -1 & x+1 \end{pmatrix}$$

などがあるわけですが, このような行列は多項式を成分とする行列の中では特殊な存在なわけです.