7　多項式と行列

演習 7.1 次の行列式 (多項式) を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix}$$

演習 7.2 次の方程式を解け.

(i) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$　　　(ii) $\begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

演習 7.3 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, $f(A)$ を求めよ.

演習 7.4

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とするとき, 次の (1), (2) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形従属となるような x の値をすべて求めよ.
(2) 上で求めた値それぞれについて, その値を x に代入したときに

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}, \quad (c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$$

を満たすような定数 c_1, c_2, c_3 の組を１つ求めよ.

[ヒント] (1) $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ とすると, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
※一般に, n 次の正方行列 A を列ベクトルを用いて $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と書くとき,

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ が線形独立} \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n \Leftrightarrow A \text{ は正則行列} \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

(2) 多分あてずっぽうで見つかると思いますが, 理論的に見つけたい時は, 教科書の定理 3.17 の証明を使って $\boldsymbol{v}({}^tA) = (0, \cdots, 0)$ の非自明解を探しましょう.

※ 今回は特別扱いの問題はありません.