7　多項式と行列 の解答例

演習 7.1〜7.3 は (計算ミスの人を除けば) ほとんど全員できていたので, 省略して書きます.

演習 7.1 $(x-1)(x-2)^2$

演習 7.2 (i) $x=\pm 1$.　(ii) $x=1$.

演習 7.3 (実はハミルトン・ケーリーの定理) $f(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

演習 7.4 (1) $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ とすると,

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3 \text{ が線形従属} \Leftrightarrow \det A=0$$

なので, $\det A=0$ となるような x の値を求めればよい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 3 & 1 \\ x^2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

より, 求める値は $x=1,3$.

(2) 例えば,

$$\begin{cases} x=1 \text{ のとき},\quad (c_1,c_2,c_3)=(1,-1,2), \\ x=3 \text{ のとき},\quad (c_1,c_2,c_3)=(1,-1,0). \end{cases}$$

※ 最後の問題は, 以前の演習で「線形独立」「線形従属」の概念を正確にとらえてない人がけっこういたように思えたので, そこを補完する意味で出したものです. 前回の授業で気づいた点も含めて, 注意事項を 2 つ書いておきます. それから, いくつか別解を書いてくれた人もいるので, それも紹介します.

注意 1. 問題文中の「$(c_1,c_2,c_3)\neq(0,0,0)$」の意味を「$c_1\neq 0$ かつ $c_2\neq 0$ かつ $c_3\neq 0$」と誤解している人が何人かいたのですが, これは「$c_1\neq 0$ または $c_2\neq 0$ または $c_3\neq 0$」の意味です. 一般に,

$$(c_1,c_2,c_3)=(c_1',c_2',c_3') \Leftrightarrow c_1=c_1' \text{ かつ } c_2=c_2' \text{ かつ } c_3=c_3'$$

ですが, これの否定命題が,

$$(c_1,c_2,c_3)\neq(c'_1,c'_2,c'_3)\Leftrightarrow c_1\neq c'_1 \text{ または } c_2\neq c'_2 \text{ または } c_3\neq c'_3$$

となります. (「$(c_1,c_2,c_3)=(c'_1,c'_2,c'_3)$ ではない」ということです.)

注意 2. 以前, 演習 4.2 の答えに「$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ が線形従属のとき, ある定数 c があって $\boldsymbol{a}_i=c\boldsymbol{a}_j$ となる $\cdots$」という議論を書いていた人が多かったのですが, 必ずしもこうなるとは限りません. 例えば, 演習 7.4 で $x=1$ としたときに, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は線形従属ですが, $\boldsymbol{a}_i=c\boldsymbol{a}_j$ となるような i,j $(i\neq j)$ はありません. この機会に「線形独立」「線形従属」の概念を間違えて理解していないか, しっかりチェックしておいてください.

演習 7.4 の別解. 別解を書いてくれた人もいたので紹介します (ただし, こちらでかなり書き直している部分もあります).

(小林, 山口) $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は線形独立なので, もし

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0},\quad (c_1,c_2,c_3)\neq(0,0,0)$$

を満たすような定数 c_1,c_2,c_3 の組があれば, $c_1\neq 0$ となるはず. そこで, $m=-c_2/c_1$, $n=-c_3/c_1$ として上の式を変形すれば,

$$\boldsymbol{a}_1=m\boldsymbol{a}_2+n\boldsymbol{a}_1\Leftrightarrow\begin{cases}1=m\\ x=3m+n\\ x^2=9m+4n.\end{cases}$$

これを解くと, $m=1$, $n=0,-2$ で, $n=0$ のとき $x=3$, $n=-2$ のとき $x=1$.

(上原) (1) $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が線形独立なので,

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3 \text{ が線形従属 } \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1 \text{ が } \boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3 \text{ の張る平面上にある } \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)=0.$$

(外積 $\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の張る平面に直交するベクトルなので, それと $\boldsymbol{a}_1$ との内積が 0 になるという条件.) 最後の式は $\det A=0$ と同じ方程式になって, それを解けば $x=1,3$.

(2) $x=1$ のとき, $(1,1,0)$ と $(1,3,1)$ が線形独立であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&1\\1&9&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0,\quad \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} \text{ が } \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \text{ と平行.}\end{aligned}$$

($x=3$ の場合も同様.)