線形代数 II 演習 (担当: 天野勝利) 2008 年 9 月 10 日

2 置換

演習 2.1 次の置換を巡回表示せよ.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

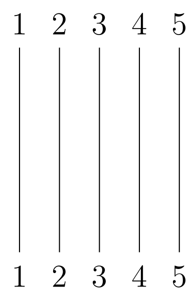
(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $(1,2,3) \circ (1,2) \circ (1,3)$

(v) $(2,3) \circ (3,1) \circ (3,2)$

(vi) $(1,3,4) \circ (2,3) \circ (1,5)$

演習 2.2 次の図に適当に横線を入れてあみだくじを (3 つ) 作り, (i)〜(iii) の置換と一致するようにせよ.



(i) $(4,5) \circ (3,4) \circ (2,3) \circ (1,2)$

(ii) $(1,4) \circ (2,3) \circ (1,2)$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

※時間が余った人は, 次も考えてみてください. 時間内に解けなかった人も, 次回の授業までに解いて皆の前で発表してもらってもよいです. (それぞれ取り組み具合に応じて加点します.)

演習 2.3 対称群 S_n $(n \geq 2)$ の任意の置換は $(i, i+1)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ という形の互換の積で書けることを証明せよ.

[注意] これは教科書の定理 3.3 (任意の置換が互換の積で書ける) よりも強い主張です (使える互換が限られるため). 例えば $(1,3,2)$ という置換を考えてみると, 定理 3.3 ならば $(1,3,2) = (1,3) \circ (3,2)$ と書ければ良かったのが, この問題の場合, 互換 $(1,3)$ が $(i, i+1)$ という形をしていないため不十分で, $(1,3,2) = (1,2) \circ (2,3) \circ (1,2) \circ (2,3)$ のように書けることを言わないといけないわけです.