前回の演習 2.3 の解答例

　実はいくつも別証明があります．ここに挙げた以外の証明を考えてみるのも面白いかもしれません．

[証明 1] (吹上, 松本) 任意の置換は互換の積で書けるので, 任意の互換 (k,l) $(k<l)$ が $(i,i+1)$ の形の互換の積で書けることを示せばよい．まず, $l=k+1$ のときはO.K. さらに,

$$
\begin{aligned}
(k,k+2) &= (k,k+1)\circ(k+1,k+2)\circ(k,k+1),\\
(k,k+3) &= (k,k+1)\circ(k+1,k+2)\circ(k+2,k+3)\circ(k+1,k+2)\circ(k,k+1),
\end{aligned}
$$

一般には,

$$(k,l)=(k,k+1)\circ(k+1,k+2)\circ\cdots\circ(l-1,l)\circ(l-2,l-1)\circ\cdots\circ(k+1,k+2)\circ(k,k+1)$$

と書ける． □

[証明 2] (上原) 任意の互換 $(k,k+l)$ $(l=1,2,3,\ldots)$ が $(i,i+1)$ の形の互換の積で書けることを, l に関する帰納法で示す．$l=1$ のときは明らか．$l>1$ のとき, $(k,k+l-1)$ について成立したと仮定すると,

$$(k,k+l)=(k,k+l-1)\circ(k+l-1,k+l)\circ(k,k+l-1)$$

であるから, $(k,k+l)$ についても成立する． □

[証明 3] n に関する帰納法で示す．$n=2$ のときは, $S_2=\{(1)=(1,2)\circ(1,2),(1,2)\}$ だから, 明らか．$n>2$ のとき, $n-1$ まで成立したと仮定する．任意の $\sigma\in S_n$ について, もし $\sigma(n)=n$ ならば, σ は S_{n-1} の元と同一視できるので, 帰納法の仮定より, $(i,i+1)$ の形の互換の積で書ける．$\sigma(n)\neq n$ のとき,

$$\sigma'=(n,n-1)\circ(n-2,n-3)\circ\cdots\circ(\sigma(n)+1,\sigma(n))\circ\sigma$$

とおくと, $\sigma'(n)=n$ だから, 先程と同様に, σ' は $(i,i+1)$ の形の互換の積で書ける．このとき,

$$\sigma=(\sigma(n),\sigma(n)+1)\circ\cdots\circ(n-3,n-2)\circ(n-1,n)\circ\sigma'$$

であるから, σ も $(i,i+1)$ の形の互換の積で書けることがわかる． □

[証明 4] n 変数 $x_1,\ldots,x_n$ の多項式 $f=f(x_1,\ldots,x_n)$ と $\sigma\in S_n$ に対して, 多項式 $\sigma(f)$ を

$$\sigma(f)=f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$$

により定める[1]. また, X をいくつかの多項式の集合とするとき, $\sigma(X)$ と書いて, X の各元に σ をかけたものの集合を表す (つまり $\sigma(X) = \{\sigma(f) \mid f \in X\}$).

ここで,

$$\Delta_+ = \{x_i - x_j \ \ (1 \leq i < j \leq n)\}, \quad \Delta_- = \{x_j - x_i \ \ (1 \leq i < j \leq n)\},$$
$$\alpha_i = x_i - x_{i+1} \in \Delta_+ \ \ (i = 1, \ldots, n-1)$$

とおく. $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ とすると, 各置換 $\sigma \in S_n$ はそれぞれ Δ の置換を引き起こす. Δ_+ と Δ_- に共通部分はないので, 任意の $f \in \Delta$ は, Δ_+ または Δ_- のどちらか一方のみに入っている. 特に, $\alpha_i \in \Delta_+$, $-\alpha_i \in \Delta_-$ である. また, 互換 $(i, i+1)$ を考えると, $(i, i+1)(\alpha_i) = -\alpha_i \in \Delta_-$ であり, Δ_+ の中の α_i 以外の元は互換 $(i, i+1)$ をかけてもまた Δ_+ に入ることが容易に分かる. 同様に, $(i, i+1)(-\alpha_i) = \alpha_i \in \Delta_+$ で, Δ_- の中の $-\alpha_i$ 以外の元は互換 $(i, i+1)$ をかけてもまた Δ_- に入る.

ここで, 任意の $\sigma \in S_n$ をとる. もし $\sigma(\Delta_+) = \Delta_+$ ならば, $\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_{n-1}) \in \Delta_+$ だから, $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n)$ となり, σ は恒等置換であることが分かる. そうでないとき, σ は (よって σ^{-1} も) 恒等置換ではないので, $\sigma^{-1}(i+1) < \sigma^{-1}(i)$ となるような i が少なくとも一つはある. そのような i をとれば, $\sigma^{-1}(-\alpha_i) \in \Delta_+$, $\sigma^{-1}(\alpha_i) \in \Delta_-$ より, $-\alpha_i \in \sigma(\Delta_+)$, $\alpha_i \notin \sigma(\Delta_+)$ である. そのとき, 集合 $(((i, i+1) \circ \sigma)(\Delta_+)) \cap \Delta_+$ の元の数は集合 $(\sigma(\Delta_+)) \cap \Delta_+$ の元の数より一つ (α_i の分) だけ大きいはずである. ここで, もし $((i, i+1) \circ \sigma)(\Delta_+) = \Delta_+$ でなければ, 上の議論の σ を $(i, i+1) \circ \sigma$ に置き換えて同じことを繰り返す. これを続けていけば, いずれは

$$((i_l, i_l + 1) \circ \cdots \circ (i_1, i_1 + 1) \circ \sigma)(\Delta_+) = \Delta_+$$

となる $i_1, \ldots, i_l$ を見つけることができる. このとき

$$(i_l, i_l + 1) \circ \cdots \circ (i_1, i_1 + 1) \circ \sigma = (1)$$

であるから,

$$\sigma = (i_1, i_1 + 1) \circ \cdots \circ (i_l, i_l + 1)$$

を得る. □

※最後の証明 4 は少々分かり辛いですが, 実はこの証明のやり方で, 与えられた置換 σ を $(i, i+1)$ の形の互換の積で表す際の互換の数[2]を最小にすることができます. 余裕のある人は, なぜこれで最小になるのかを考えてみるのも面白いかもしれません.

[1]意味が分からなければ, 教科書第 3 章の章末問題 4 を参照してください

[2]あみだくじでいうと横棒の数