微積分 III 演習 (担当: 天野勝利) 2007 年 12 月 19 日

2 実数の連続性・コーシー列

演習 2.1 $a > b > 0$ なる実数 a, b に対し, $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$, $b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ $(n \geq 2)$ とおくと, 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は同じ極限値に収束することを示せ. (この極限値を a と b の**算術幾何平均**という.)

(ヒント) $a_{n-1} \neq b_{n-1}$ のとき $(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2 > 0$ だから, すべての n について $a_n > b_n$ であることが証明できる. さらにそこから $\{a_n\}$ が単調減少, $\{b_n\}$ が単調増大であることを示せ. すると実数の連続性 (教科書 p. 251 の **(M)**) により, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は収束することがいえる. それぞれの極限値を l, m とするとき, 教科書の定理 7.3 (5) より $l \geq m$. そこで $l > m$ と仮定して矛盾を導こう (背理法).

演習 2.2 $a > 0$, $b > 0$ なる実数 a, b に対し, $a_1 = \dfrac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = \sqrt{a_1 b}$, $a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$, $b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$ $(n \geq 2)$ とおくと, 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は同じ極限値に収束することを示せ.

(ヒント) $a > b$ の場合と $b > a$ の場合とで場合分けして考える. 前問のヒントも参照.

演習 2.3 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ とすると, $\{a_n\}$ はコーシー列になることを示せ.

(ヒント) $\dfrac{1}{m^2} < \dfrac{1}{m(m-1)} = \dfrac{1}{m-1} - \dfrac{1}{m}$ ($m \geq 2$ のとき).

演習 2.4 $a_n = \log n$ とする. 次を証明せよ.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 十分大きな自然数 N を選べば, すべての $n \geq N$ について $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ となる.

(2) しかし数列 $\{a_n\}$ はコーシー列ではない. (教科書の定理 7.9 は使わずに証明してください.)

(ヒント) (1) $x > 0$ のとき, $\log x < \alpha \Leftrightarrow x < e^{\alpha}$. 対数法則を思い出して⋯ . (2)「$\{a_n\}$ がコーシー列である」という命題を否定するには何をいえば良いか, 定義をもとに考えてください.