演習 3.5 について

演習 3.5 は $a_n = \sin\left(\frac{n}{6} + \frac{1}{n}\right)\pi$ と書こうとしていたところ, π が落ちているため, 難しい問題になってしまいました. ここでは, そのままでこの問題を考えてみます (まだ解けていません). おそらく上極限が 1, 下極限が -1 となると思うのですが, きちんと証明しようとすると難しい. とりあえず, 連分数展開という手法 (後述) を使って証明を目指したのですが, 途中で壁にぶつかってしまいました.

問題. 数列 $a_n = \sin\left(\frac{n}{6} + \frac{1}{n}\right)$ の上極限と下極限を求めよ.

3π を連分数展開して (下記の「連分数について」という節を参照),

$$3\pi = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \cdots}}}$$

と書けているとする. この連分数を k_{n-1} までで打ち切って得られる有理数を既約分数で表して $\frac{p_n}{q_n}$ とする. (つまり,

$$\frac{p_1}{q_1} = k_0, \quad \frac{p_2}{q_2} = k_0 + \frac{1}{k_1}, \quad \frac{p_3}{q_3} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2}}, \quad \cdots$$

で, $p_n, q_n \in \mathbb{N}$, p_n と q_n の最大公約数は 1.) すると, 連分数の性質として次が成り立つ:

(1) $\{q_n\}$ は単調増大数列で, $n \to \infty$ のとき $q_n \to \infty$.

(2) $\left|3\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$.

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = 3\pi$.

まず, (1) と (3) により, $p_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ もいえることに注意. また, (2) の両辺に q_n をかければ

$$|3\pi q_n - p_n| < \frac{1}{q_n}$$

だから, これと (1) により,

(4) $\lim_{n\to\infty} (3\pi q_n - p_n) = 0$

も分かる (わざわざ連分数を使おうと思ったのはこの性質のためです).

以下, 上極限が 1 になることについての見通しを述べる. $\sin x$ の連続性[1]は既知とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$\left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta \Rightarrow |\sin x - 1| < \varepsilon$$

が成り立つ. (4) と $p_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ により, この δ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば

$$|3\pi q_n - p_n| < 3\delta, \quad \frac{1}{p_n} < \frac{\delta}{2}$$

となるようにできる. 左側の式を 6 で割ると,

$$\left| \frac{p_n}{6} - \frac{\pi}{2} q_n \right| < \frac{\delta}{2}$$

となる.

ここで, 次が成り立つことを予想 (というか希望) する:

予想 1. $q_n \equiv 1 \mod 4$ となるような n は無限個存在する.

この予想が成立するとすれば, $n \geq N$ かつ, ある $m \in \mathbb{N}$ を用いて $q_n = 4m + 1$ となるような自然数 n が存在して,

$$\left| \frac{p_n}{6} + \frac{1}{p_n} - 2m\pi q_n - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \frac{p_n}{6} + \frac{1}{p_n} - \frac{\pi}{2} q_n \right| \leq \left| \frac{p_n}{6} - \frac{\pi}{2} q_n \right| + \left| \frac{1}{p_n} \right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

となる. よってこのとき,

$$\left| \sin\left(\frac{p_n}{6} + \frac{1}{p_n} \right) - 1 \right| = \left| \sin\left(\frac{p_n}{6} + \frac{1}{p_n} - 2m\pi q_n \right) - 1 \right| < \varepsilon.$$

ε は任意の正の数だったから, これにより, 数列 $\{a_n\}$ の上極限が 1 であることが分かる.

また, 上記と同様に, 次が成立すれば下極限が -1 になることが分かる:

予想 2. $q_n \equiv 3 \mod 4$ となるような n は無限個存在する.

というわけで, 「予想」の部分がちゃんといえれば良いのですが, これを証明するのは相当難しそうで, ここで壁につきあたってしまった, というわけでした.

---

[1] 関数の連続性の厳密な定義は近いうちに微積分 III の講義でやると思います. 教科書の第 8 章を参照してください.

連分数について

α を任意の無理数とする．α を超えない最大の整数を k_0 とすると，ある無理数 α_1 (>1) があって，

$$\alpha = k_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

となる．さらに，α_1 を超えない最大の整数を k_1 とすると，ある無理数 α_2 (>1) があって，

$$\alpha_1 = k_1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

となる．このとき，

$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}.$$

これを繰り返せば，

$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \cdots}}}$$

という列を得る．これを α の連分数展開という．

連分数展開を n 項で打ち切った有理数を既約分数で表わして p_n/q_n とすると，この分数は $n \to \infty$ のとき α に収束するので，この p_n/q_n たちを α の近似分数と言ったりします．これについて本文中の (1)(2)(3) のようなことがいえるわけですが，詳細は，高木貞治著「初等整数論講義 第２版」(図書館に数冊あると思います) の §19, §20 を参照してください．(1)(2)(3) にあたる性質は p. 132〜p. 133 あたりに書いてあるはずです．