

## 6 連続関数 (つづき)

**演習 6.1** 関数  $f(x) = \sqrt{x}$  が区間  $[0, \infty)$  において連続であることを示せ.

**演習 6.2**  $a$  を正の数とするととき, 関数  $f(x) = a^x$  が  $\mathbb{R}$  において連続であることを示せ.

(ヒント)  $a$  と 1 との大小関係に注意.

**演習 6.3**  $f(x), g(x)$  が  $\mathbb{R}$  で連続な関数であるとき, 合成関数  $f(g(x))$  も  $\mathbb{R}$  で連続になることを示せ.

**演習 6.4**  $\mathbb{R}$  上の関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が有理数のとき}) \\ x & (x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

により定める. このとき,  $f(x)$  は 0 においてのみ連続で, それ以外のところではすべて不連続であることを示せ.

(ヒント) 以前お話した「有理数の稠密性」を思い出して.

**演習 6.5**  $f(x), g(x)$  を閉区間  $[a, b]$  で連続な関数とする.  $f(a) > g(a)$  かつ  $f(b) < g(b)$  のとき, ある  $c \in [a, b]$  が存在して  $f(c) = g(c)$  となることを証明せよ.

(ヒント) 中間値の定理をうまく使いましょう.