

5 関数の極限・連続関数の定義

演習 5.1 a を実数とする. 関数 $f(x) = x^2$ について, 任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとき, 「 $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 」となる $\delta > 0$ を一つ求めよ.

演習 5.2 a を正の数とする. 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ について, 任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとき, 「 $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 」となる $\delta > 0$ を一つ求めよ.

演習 5.3 a を実数とする. 関数 $f(x) = 2^x$ について, 任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとき, 「 $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 」となる $\delta > 0$ を一つ求めよ.

演習 5.4 実数全体 \mathbb{R} 上で定義された関数 $f(x)$ が, ある点 $a \in \mathbb{R}$ において連続であるための必要十分条件は, a に収束する任意の実数列 $\{a_n\}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ となることであることを示せ.

演習 5.5 $f(x)$ を \mathbb{R} において連続な関数とする. もし, $f(1) = 1$ で, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $f(x + y) = f(x) + f(y)$ が成り立つならば, $f(x) = x$ であることを証明せよ.