

4 前回までの範囲 + 関数の極限 (定義の確認程度)

演習 4.1 A, B を実数の集合とし, どちらも上に有界とする. このとき次を示せ.

(1) $\sup\{x + y \mid x \in A, y \in B\} = \sup A + \sup B$.

(2) 0 でない任意の実数 a に対し, $a > 0$ ならば $\sup\{ax \mid x \in A\} = a \cdot \sup A$ であり, $a < 0$ ならば $\inf\{ax \mid x \in A\} = a \cdot \sup A$.

演習 4.2 数列 $a_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ の上極限と下極限を求めよ.

演習 4.3 数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ はコーシー列にならないことを示せ.

演習 4.4 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ が $x \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束することを, 定義に従って (ε - δ 論法で) 示せ.

演習 4.5 関数 $f(x) = e^x$ が $x \rightarrow 0$ のとき 1 に収束することを, 定義に従って (ε - δ 論法で) 示せ.

前回の問題 (12 月 26 日出題) の訂正とコメント

前回の問題にはいろいろミスがありました. 申し訳ありません.

- 演習 3.1 は三つの独立した問題をまとめたもの, 演習 3.2 は二つの独立した問題をまとめたものです (例えば演習 3.2 は「(1)(2) 両方を満たす A, B の例を挙げよ」という問題ではないです).
- 演習 3.1 (3) の「任意の $a, b \in A$ に対し」は「 $a < b$ となる任意の $a, b \in A$ に対し」に直してください. (この訂正をせずに問題を読んだとすると, 「そのような例は存在しない」が正解となってしまいます.)
- 演習 3.5 は $a_n = \sin \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{n} \right) \pi$ と書こうとしていたところ, π が落ちていたため, 難しい問題になってしまいました. そのままで問題を考えてみたのですが, 私はまだ解けていません¹. おそらく上極限が 1, 下極限が -1 となると思うのですが, きちんと証明しようとするのが難しいです.

¹もし誰も解いてなければ, 今夜あたりホームページ (<http://www.green.dti.ne.jp/amano/lec2007i/calcIII-ex/index.html>) に私が考えたこと (ヒントになるかどうかは不明) を載せる予定なので, 興味がある人は一緒に考えてみましょう.