微分積分基礎 (担当: 天野勝利)　　2007 年 10 月 4 日

指数法則と指数の拡張・累乗根

前回「べき関数」にあまりピンとこなかった人は, 指数の拡張について復習しましょう. このプリントは, 講義ではあまり詳しくお話する時間がなかった指数法則と指数の拡張について, もう少し詳しくまとめたものです. これは今後の講義で扱う「指数関数・対数関数」について学習する際にも参考になると思います。

a を正の数 (例えば $a = 10$ など) とします. 指数の拡張というのは, a^x というものを, x が正の整数だけでなく一般の実数のときにも意味をもつように拡張しようというものです.

1　指数の拡張の基本方針

まず, m, n が正の整数の時に,

$$(1)\quad a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad (2)\quad (a^m)^n = a^{nm}$$

が成立します. これは次の式を見れば分かると思います:

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m} \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n} = a^{n+m}, \qquad (a^m)^n = \underbrace{a^m \times \cdots \times a^m}_{n} = a^{nm}.$$

上記の (1), (2) は**指数法則**のうちの二つなのですが, 指数の拡張の基本方針は, これらが正の整数以外の n, m についてもやはり矛盾なく成立するようにしよう, というものです.

2　指数が 0 や負の整数の場合

まず, 0 の場合, (1) を拡張して,

$$a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$$

が任意の正整数 m について成り立って欲しいところです. そのためには,

$$a^0 = 1$$

であれば良いので, これを 0 乗の定義とします.

次に, 負の整数の場合, (1) で $n = -m$ とした式

$$a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

が任意の正整数 m について成立して欲しい. そのためには,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

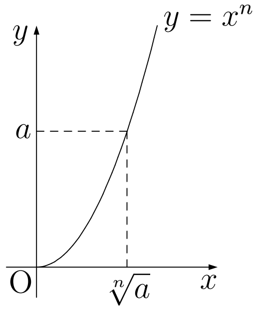
であれば良いので, これを a^{-m} の定義とします.

3　指数が $1/n$ の形の場合: 累乗根

指数が正整数の逆数 $1/n$ の場合, (2) 式で $m = 1/n$ としてみた式,

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a^1 = a$$

が成立して欲しい. そのためには, $a^{\frac{1}{n}}$ が「n 乗すると a になる数」であれば良いわけです. n 乗して a になる数を, **a の n 乗根**といいます. しかし, a の n 乗根は一つとは限りません. 例えば, $a = 16$, $n = 4$ のとき, 2 は 16 の 4 乗根ですが, -2 も 4 乗すれば 16 になるので, やはり 16 の 4 乗根です. (さらに, 複素数の範囲に話を広げると, 16 の 4 乗根はあと二つあります.) このままでは困るので, a の n 乗根たちのうち, **正の実数**であるものを考えることにします. 実は a の n 乗根のうち正の実数であるものはただ一つだけ存在するので, それを $\sqrt[n]{a}$ と書き, これにより $a^{\frac{1}{n}}$ を定義します.



$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = (a \text{ の } n \text{ 乗根のうち正の実数であるもの}).$$

4　指数が一般の有理数の場合

n, m が正整数のとき,

$$\begin{aligned} a^{\frac{n}{m}} &= \underbrace{a^{\frac{1}{m}} \times \cdots \times a^{\frac{1}{m}}}_{n} = (\sqrt[m]{a})^n \\ &= (a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \\ a^{-\frac{n}{m}} &= \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = \left(\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right)^n \end{aligned}$$

とします[1]

5　そして再び指数法則

というわけで, 任意の実数 x について a^x を定義することができて, 先程の (1), (2) を次のように拡張することができます: x, y を実数とするとき,

$$(1) \quad a^x \times a^y = a^{x+y}, \qquad (2) \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

[1]指数が無理数の場合については, 数列の極限で定義します. x を無理数, $\{x_n\}$ を x に収束する有理数列とするとき, 数列 $\{a^{x_n}\}$ がある値に収束するので, その値を a^x とします.

が成立する. それから先程は書きませんでしたが, 指数法則にはもう一つあって, a, b を正の数とするとき,

$$(3) \quad (ab)^x = a^x b^x$$

が成立することも重要です.

6　べき関数と指数関数

前回お話しましたが, **べき関数**とは, α を実数とするとき, x を独立変数として

$$y = x^\alpha$$

と定義される関数です. もし α が正の整数であれば, 定義域として $-\infty < x < \infty$ (実数全体) がとれますが, 負の整数ならば定義域は 0 以外の実数全体となります. α が整数でない場合は $x > 0$ が定義域です.

指数関数は, 今度は右肩の指数の方が独立変数となります. a を正の実数として,

$$y = a^x$$

と定義される関数です. 定義域は実数全体となります.

べき関数と指数関数の違いは, 独立変数の部分です. べき関数は α という定数を固定して, x^α の x の部分が変動するのに対し, 指数関数の場合は a を固定して a^x の x の部分が変動するわけです.