関数基礎演習 (担当: 天野勝利) 2007 年 6 月 25 日

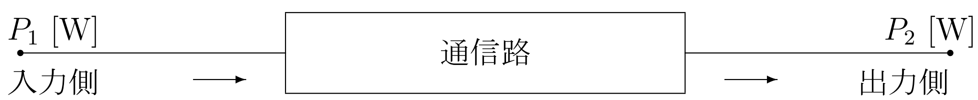
指数関数・対数関数 (その 1)

1　はじめに

指数や指数法則といったことが明確に意識されるようになり, さらに対数というものが考えられるようになったのは 16 世紀くらいからです. 「対数」という概念を最初に考えたのは, 16 世紀から 17 世紀初頭ごろ, スコットランドの男爵で, 数学者としても活躍していた**ネーピア (Napier)** という人です. ネーピアは「掛け算や割り算の操作を簡明化する」といったような, 計算技術に関連した動機で対数を考えていたそうです.

指数や対数は今日では物理学や工学のいろいろなところで用いられていますが, ここでは導入的なお話として, 対数を使って定義されている **デシベル (dB)** という単位について少し紹介したいと思います. デシベルというと, 音の大きさを表す単位を連想する人も多いかもしれませんが, それだけではなく, 通信技術に関連して広く用いられている単位です. 例えば最近ではインターネットへの接続回線を ADSL から光ファイバーに乗り換えるよう, 各社が盛んに宣伝していますが, このときに両者の性能の違いとして, 光ファイバーの方が**伝送損失 (減衰)** が非常に小さい, ということがよく言われます. この伝送損失の単位が dB です. この他に, 電気系の CAD ソフトでグラフを表示する際に「片側を対数目盛りにする」というくらいの意味でこの単位が使われているのを見たことがあるので, 業界によっては常識的に知っていなければならない単位なのかもしれません.

伝送損失についてもう少し説明します. 下図は非常に大雑把な図ですが, ケーブルを通じて左から右へ電気信号を送っている状況を表したものです. 通信路の入力側と出力側の電力を計測すると, 通信路の途中で生じる様々な理由により, 出力側の電力は落ちていたりするのですが, そのときの入出力電力の相対的な差異を表す量として伝送効率や伝送損失というものを考えます.



正確に言いますと, 入力電力が P_1 [W], 出力電力が P_2 [W] のとき, この通信路の**伝送効率**(または**電力利得**) は,

$$\log_{10}\frac{P_2}{P_1}\ \ [\mathrm{B}] = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}\ \ [\mathrm{dB}]$$

と表されます. 等式の右辺で 10 倍しているのは, ベル (B) という単位を, 10 分の 1 を表すデシ (deci) がついた dB に直しているからです. P_1 より P_2 の方が小さいと, この

値は負になるのですが, その場合「− ○○ dB の伝送効率」という代わりに「○○ dB の伝送損失」ということの方が多いです. つまり伝送損失は $-10\log_{10}(P_2/P_1)$ [dB] となります. ここで, $\log_{10}$ というのが対数を表す記号です. 一般に, $\log_{10} x$ というのは「10 を何乗したら x になるのか」を表す数です. 正確に言うと, $y = \log_{10} x$ ということと $10^y = x$ ということが同じ意味になります:

$$10^y = x \quad \overset{\text{同じ意味}}{\Longleftrightarrow} \quad y = \log_{10} x.$$

同じことを二通りの表現方法で表しているわけです. 例えば

$$10^2 = 100 \quad \overset{\text{同じ意味}}{\Longleftrightarrow} \quad \log_{10} 100 = 2$$

です. というわけで, 指数と対数は表裏一体の関係があります. 正確にいえば, 指数関数と対数関数は互いに逆関数になっているわけです.

10^y と書くと, 10^2 や 10^3 のように, y が正の整数のときしか考えられなかったときは, x としては 100 とか 1000 とか, きりのいい数しか考えられないわけですが, 講義でお話したように, y が 0 や負の数であったり, 分数であったりしてもちゃんと考えることができます (指数の拡張). それに応じて 10^y はきりのいい数以外にもいろいろな値をとることになります.

ところで, 一口に通信路といっても幾つか増幅器 (アンプ) を通したり, 分岐回路で電流が分かれてパワーが落ちたり, ケーブル同士を接続するときに損失が生じたりと, いろいろな部分で電力が増幅されたり減衰したりします. 伝送効率 (や伝送損失) は実際にはそういった各部分ごとに測定したりするわけです. そういった個々の部分ごとの伝送効率から通信路全体の伝送効率を算出したいときにはどうすれば良いかというと, 実は, これからみなさんが勉強する**対数法則**というものがうまく働いて, 個々の伝送効率を足し合わせたものが全体の伝送効率になります. 単純に足し算してしまえば良いのです. そのように, 計算が足し算引き算だけで済んでしまう, というところが伝送効率を dB で表すことの一つのメリットです. (このへんの感覚はもしかしたら, ネーピアが対数を考えた最初の動機に近いかもしれません.) 対数法則というのは**指数法則**というものを対数で置き換えたときの法則です. 例えば $y_1 = \log_{10} x_1$, $y_2 = \log_{10} x_2$ のとき,

$$10^{y_1+y_2} = \underbrace{10^{y_1}}_{x_1} \times \underbrace{10^{y_2}}_{x_2} \overset{\text{同じ意味}}{\Longleftrightarrow} \log_{10}(x_1 \times x_2) = \underbrace{\log_{10} x_1}_{y_1} + \underbrace{\log_{10} x_2}_{y_2}.$$

この式の左側は指数法則のうちの一つで, 右側は対数法則のうちの一つです. さっき言った「計算が足し算引き算だけで済んでしまう」というのはこの法則のおかげです. たとえば, 通信路全体の伝送損失を合計して 20 dB くらいになりそうだという場合, その前に利得 20 dB の増幅器を設置すれば入力電力と出力電力のつり合いがとれる, といった具合に大まかな設計を考える時にこの性質が威力を発揮します.

2　指数法則と指数の拡張・累乗根

講義でお話した指数の拡張について, このプリントでも簡単にまとめておきます. a を正の数 (例えば $a = 10$ など) として, a^x と書いたときに, x が正の整数だけでなく一般の実数のときにも意味をもつように拡張するわけです.

まず, m, n が正の整数の時に,

$$(1) \quad a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad (2) \quad (a^m)^n = a^{nm}$$

が成立します. これは次の式を見れば分かると思います:

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m} \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n} = a^{n+m}, \qquad (a^m)^n = \underbrace{a^m \times \cdots \times a^m}_{n} = a^{nm}.$$

上記の (1), (2) は**指数法則**のうちの二つなのですが, 指数の拡張の基本方針は, これらが正の整数以外の n, m についてもやはり矛盾なく成立するようにしよう, というものです.

2.1　指数が 0 や負の整数の場合

まず, 0 の場合, (1) を拡張して,

$$a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$$

が任意の正整数 m について成り立って欲しいところです. そのためには,

$$a^0 = 1$$

であれば良いので, これを 0 乗の定義とします.

次に, 負の整数の場合, (1) で $n = -m$ とした式

$$a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

が任意の正整数 m について成立して欲しい. そのためには,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

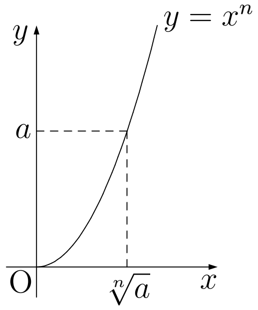
であれば良いので, これを a^{-m} の定義とします.

2.2　指数が $1/n$ の形の場合: 累乗根

指数が正整数の逆数 $1/n$ の場合, (2) 式で $m = 1/n$ としてみた式,

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \times n} = a^1 = a$$

が成立して欲しい. そのためには, $a^{\frac{1}{n}}$ が「n 乗すると a になる数」であれば良いわけです. n 乗して a になる数を, **a の n 乗根**といいます. しかし, a の n 乗根は一つとは限りません. 例えば, $a = 16$, $n = 4$ のとき, 2 は 16 の 4 乗根ですが, -2 も 4 乗すれば 16 になるので, やはり 16 の 4 乗根です. (さらに, 複素数の範囲に話を広げると, 16 の 4 乗根はあと二つあります.) このままでは困るので, a の n 乗根たちのうち, **正の実数**であるものを考えることにします. 実は a の n 乗根のうち正の実数であるものはただ一つだけ存在するので, それを $\sqrt[n]{a}$ と書き, これにより $a^{\frac{1}{n}}$ を定義します.



$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = (a \text{ の } n \text{ 乗根のうち正の実数であるもの}).$$

2.3　指数が一般の有理数の場合

n, m が正整数のとき,

$$\begin{aligned} a^{\frac{n}{m}} &= \underbrace{a^{\frac{1}{m}} \times \cdots \times a^{\frac{1}{m}}}_{n} = (\sqrt[m]{a})^n \\ &= (a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \\ a^{-\frac{n}{m}} &= \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = \left(\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right)^n \end{aligned}$$

とします[1]

2.4　そして再び指数法則

というわけで, 任意の実数 x について a^x を定義することができて, 先程の (1), (2) を次のように拡張することができます: x, y を実数とするとき,

$$(1) \quad a^x \times a^y = a^{x+y}, \qquad (2) \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

が成立する. それから先程は書きませんでしたが, 指数法則にはもう一つあって, a, b を正の数とするとき,

$$(3) \quad (ab)^x = a^x b^x$$

が成立することも重要です. 問題演習をこなしてこれらの使い方に習熟しましょう.

[1]指数が無理数の場合については, 数列の極限で定義します. x を無理数, $\{x_n\}$ を x に収束する有理数列とするとき, 数列 $\{a^{x_n}\}$ がある値に収束するので, その値を a^x とします.