微分積分応用 (担当: 天野勝利) 2007 年 7 月 12 日

宿題その 2 (平均値と定積分)

連続的に変化する関数の「平均値」というものを考えてみましょう. 離散的なデータ, 例えば, テストの平均点を考える場合なら, 受験者全員の点数の総和をとって, それを受験者数で割れば良いわけですが, この「総和」の部分を定積分で考えれば, 似たようにして連続的な関数の平均を考えることができます.

a, b を実数, $a < b$ とするとき, 関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における平均値とは,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

のことをいいます. $f(x)$ を a から b まで定積分して, それを区間の大きさ $b-a$ で割れば良いわけです.

ここで, (いきなり電気の話になりますが) 最大値 E_m [V], 周期 T [s] の正弦波交流電圧

$$e(t) = E_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

を考えてみます. 交流回路について勉強したことがある人ならば[1], この交流電圧の平均値 E_a [V] と実効値 E [V] は, それぞれ

$$E_a = \frac{2}{\pi}E_m, \qquad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

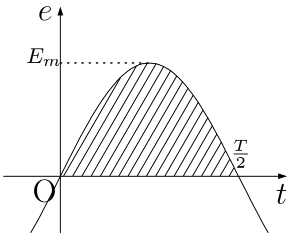
となることは知っていると思います (例えば家庭用電源の「AC 100 V」というのは実効値のことである, ということなども聞いたことがあるかもしれません). ただ, 少し軽めのテキストだと, なぜ平均値が最大値の $2/\pi$ 倍で, なぜ実効値が最大値の $1/\sqrt{2}$ 倍なのか, というところの説明は省略していることが多いようです. そこで, 定積分を使ってそこのところをきっちり確認してみましょう—というのが今回の宿題です.

提出要項

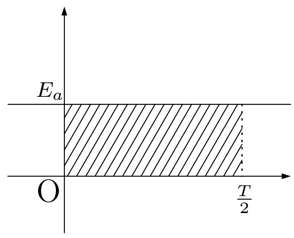
- 次ページ (裏面) の文章中の「課題 1」と「課題 2」に答えてレポートにまとめること.
- 期限: 2007 年 7 月 26 日 (期末試験の日)
- 用紙: A4 レポート用紙 (枚数は自由、表紙不要)、2 枚以上になる場合は左上をホチキスで綴じておくこと. 学籍番号と名前を忘れずに.

[1] なお, 交流回路の勉強をしたことがない人でも定積分の計算ができればレポートを書けるようにしているので, ここがよくわからない人でもとりあえず先を読んでください

交流の平均値. 正弦波交流電圧 $e(t) = E_m \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ の平均値 E_a とは, 半周期 ($t = 0$ から $t = T/2$ まで) における $e(t)$ の平均値 E_a のことをいう. つまり, 下左図の斜線部の面積と下右図の長方形の面積が等しくなるような E_a を求めればよい.

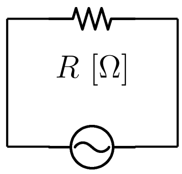


$e = E_m \sin(\frac{2\pi}{T}t)$



課題 1. 定積分を使って, 上記の E_a が E_m の $2/\pi$ 倍になることを確かめよ.

交流の実効値. 交流電流, または交流電圧のために生じる電力と等しい電力を与えるような等価的な定常電流, または定常電圧のことを実効値という. ここでは正弦波交流電圧 $e = E_m \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ の実効値を次のように求めてみる.



$e = E_m \sin(\frac{2\pi}{T}t)$

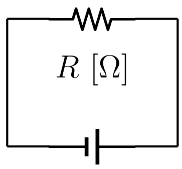
まず, 上図のように抵抗 R [Ω] に交流電圧 e をかけたとき, 時刻 t における瞬時電力は,

$$\frac{e(t)^2}{R} = \frac{E_m^2}{R} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

となる. このとき, 一周期の間 ($t = 0$ から $t = T$) での瞬時電力の平均値をとれば, この交流回路の消費電力 P [W] が求まる.

課題 2. (1) $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \frac{e(t)^2}{R}dt$ を求めよ (E_m と R を使って表せ).

(2) 下図のように, 抵抗 R に定常電圧 E [V] をかけたとき, 抵抗 R における消費電力は E^2/R [W] となる. そこで $E^2/R = P$ となるような E の値を求めれば, それが実効値となる. (1) の結果を使って $E = E_m/\sqrt{2}$ となることを確かめよ.



E [V]