微分積分応用 (担当: 天野勝利) 2007 年 5 月 10 日

宿題その１ (テイラー近似について)

数表や関数電卓などで関数の値を計算するのに, テイラー近似を基本としたテクニックが用いられています. 計算の精度を高めるには, 近似式をより高次の部分まで用いれば良いのですが, それ以前に, 最初に選ぶ近似式としてなるべく精度の高いもの (収束の早い級数) を用いることが重要になります. ここでは, $\log 2 = \log_e 2$ の値を二つの異なる近似式を用いて計算して, その精度の違いを見てみることにします.

課題

(1) 関数 $\log(1+x)$ の $x=0$ のまわりでの 10 次近似式を求めよ[1].

また, 求めた近似式に $x=1$ を代入して $\log 2$ の近似値を小数第 6 位まで計算せよ[2] (第 7 位以下は四捨五入).

(2) 関数 $\log(1-x)$ の $x=0$ のまわりでの 10 次近似式を求めよ.

(3) 関数 $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ の $x=0$ のまわりでの 9 次近似式を求めよ (ヒント: $\log\dfrac{1+x}{1-x} = \log(1+x)-\log(1-x)$).

また, 求めた近似式に $x=\dfrac{1}{3}$ を代入して $\log 2$ の近似値を小数第 6 位まで計算せよ[3] (第 7 位以下は四捨五入).

(4) 関数電卓または数表を用いて $\log 2$ の値を調べ, (1)(3) の結果と比較せよ. (なお, 関数電卓では自然対数のキーは “log” ではなく “ln” であることに注意.)

提出要項

- 期限: 2007 年 5 月 31 日の授業時までに提出
- 用紙: A4 レポート用紙 (枚数は自由、表紙不要)、２枚以上になる場合は左上をホチキスで綴じておくこと. 学籍番号と名前を忘れずに.
- 手計算する際に参考になることを脚注に書いておきましたが, 分数の計算などに電卓を使ってもかまいません.

---

[1] 参考: $f(x)=\log(1+x)$ とするとき, 自然数 $n \geqq 1$ について,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

となることを確認せよ.

[2] 参考: $1,\ldots,10$ の最小公倍数は 2520 である.

[3] 参考: $3^4=81$, $3^5=243$, $3^6=729$, $3^7=2187$, $3^{11}=177147$, $5\times 7\times 177147 = 6200145$