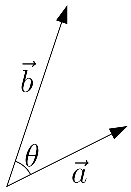
線形代数基礎演習 (担当: 天野勝利) 2006 年 5 月 23 日

内積

1 内積の定義

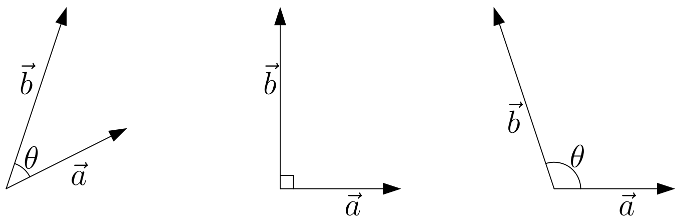
ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ があって, 始点を合わせて描いたときに, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が θ であったとします (一応, 角 θ は小さい方, つまり $0 \leqq \theta \leqq \pi$ となる方をとることにする).



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

このとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$ (ただし, $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは θ に意味はなく, 単に $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ とする) により定義します[1]. θ の値によって $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の正負が異なることに注意しましょう:

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$



$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (鋭角) $\qquad$ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (直角) $\qquad$ $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi$ (鈍角)

特に, 内積が 0 のとき二つのベクトルは直交している, また逆に直交する二つのベクトルの内積は 0 になる, ということは重要なので, 覚えておいてください:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ は直交.}$$

実は, θ が分からなくても $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分表示が分かっていれば内積が計算できるので (後述), 二つのベクトルが直交しているかどうかを成分表示だけから調べたいときに, よくこのことが用いられます.

また, $\vec{a} = \vec{b}$ のとき, $\theta = 0$ なので $\cos\theta = 1$ となり,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

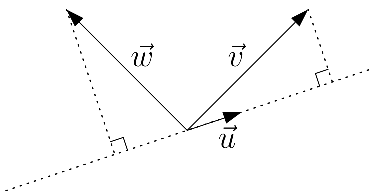
が成立します. これはベクトルの大きさ (の 2 乗) を内積で表したいときによく用いられます. 大きさ (の 2 乗) を内積で表しておくと, 内積の線形性 (後述) などが応用できて便利なことがあるためです.

[1] 教科書では内積を表すのに $(\vec{a}, \vec{b})$ という記号を使っていますが, 物理学の本などの多くは $\vec{a} \cdot \vec{b}$ という記号を使っているので, この講義ではこちらを採用することにします

2　内積の機能—方向成分をとりだす

内積というものを考える最も大きな理由は,「方向成分をとりだす」という機能があるためです. 例えば, 力学では, 物を動かすのに力がどのくらい寄与したかを表す「仕事」という物理量を考えることがあります. 仕事というのは, いくつかの力がかかって物体が動いたときに, ある一つの力に注目して, 物体が実際動いた方向の力の成分をとりだして, それに位置の変位の大きさ (動いた距離) をかけたものなのですが, それを数学的に定義するのには内積が用いられます.

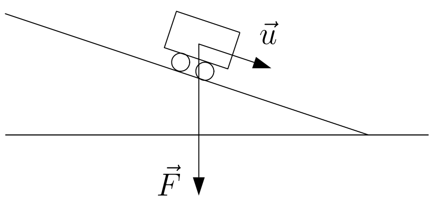
方向成分とは何かということを説明するため, まず, 内積の片方のベクトルが単位ベクトルのときを考えてみます. $\vec{v}$ をベクトル, $\vec{u}$ を単位ベクトルとして, $\vec{v}$ と $\vec{u}$ のなす角を θ とすると, $|\vec{u}| = 1$ なので, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cos\theta$ となります. これを「$\vec{v}$ の $\vec{u}$ 方向の成分」と思うことができます.



上の図でいうと, $\vec{v}$ の始点から, $\vec{u}$ を含む直線に $\vec{v}$ の終点から降ろした垂線の足までの長さが丁度 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cos\theta$ になっています. $\vec{v}$ というベクトルは, $\vec{u}$ 方向には $\vec{u} \cdot \vec{v}$ だけ進むベクトルであるというわけです. また, 上の図の $\vec{w}$ のようなベクトルがあったとすると, $\vec{w}$ と $\vec{u}$ のなす角は鈍角になるので $\vec{u} \cdot \vec{w}$ は負の値になりますが, それは, $\vec{u}$ 方向の成分でみたときに $\vec{w}$ は $\vec{u}$ とは逆向きに進むベクトルであることを意味します.

例えば, $(1, 0)$ は x 軸方向の単位ベクトルなので, ベクトル (a, b) との内積をとると x 成分がでてきて, $(1, 0) \cdot (a, b) = a$ となります. 同様に, $(0, 1)$ は y 軸方向の単位ベクトルなので, $(0, 1) \cdot (a, b) = b$ と, y 成分がでてくるわけです.

ここで, 力学でいう「力の方向成分」とはどういうことか少し説明しますと, 例えば, 下図のように, 坂道にトロッコが置かれたとします.



トロッコにかかっている重力を $\vec{F}$, 坂道を降りる方向の単位ベクトルを $\vec{u}$ とします. すると, $\vec{u}$ 方向の重力の成分は $\vec{u} \cdot \vec{F}$ で, これは坂道を降りる方向に重力がもたらす力の大きさを表します. さらにこのままトロッコが坂道を k だけ降りたとすると, 位置の変位は $k\vec{u}$ となりますが, このときの重力の仕事は, 変位と重力との内積 $(k\vec{u}) \cdot \vec{F}$ です (次の節の (iii) により, これは, 重力の $\vec{u}$ 方向の成分 $\vec{u} \cdot \vec{F}$ と距離 k との積に一致します).

3　内積の計算

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ をベクトル, k をスカラーとすると, 次のことが成立します.

(i)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	(交換法則, または可換法則),
(ii)	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$	(分配法則),
(iii)	$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ $(= k\vec{a} \cdot \vec{b}$ と書いて良い)	(結合法則).

これらの証明は教科書の pp. 14–16 に載っていますし, 講義でもお話したので, プリントでは割愛します (ちなみに, 講義でやった証明は, 教科書の証明の「正射影」と書いてある部分を「方向成分」と読み直したものです).

(i), (ii), (iii) をあわせて使うと, k, l をスカラー, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ をベクトルとするときに

$$\vec{a} \cdot (k\vec{b} + l\vec{c}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} + l\vec{a} \cdot \vec{c}, \qquad (k\vec{a} + l\vec{b}) \cdot \vec{c} = k\vec{a} \cdot \vec{c} + l\vec{b} \cdot \vec{c}$$

が成立することがいえますが, これを内積の (双) 線形性と言います.

重要なのは, 上に書いたことを繰り返し使うと, 例えば

$$(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{c} + 2\vec{d}) = 3\vec{a} \cdot \vec{c} + 6\vec{a} \cdot \vec{d} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 4\vec{b} \cdot \vec{d}$$

のように, 1 次式の積と似たような操作が自由にできる, ということです. もちろん, 内積と整式の積との違いを意識しておく必要はありますが. (そういえば, ベクトルの和とスカラー倍についても似たような話をしましたね.)

成分表示による内積の計算. 二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について, 両方の成分表示が分かっていれば, $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角が分からなくても, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を計算することができます. 実際, $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ と成分表示されていたとすると, 内積の線形性を使って,

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = ((a_1, 0) + (0, a_2)) \cdot ((b_1, 0) + (0, b_2)) \\
&= (a_1(1, 0) + a_2(0, 1)) \cdot (b_1(1, 0) + b_2(0, 1)) \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2
\end{aligned}$$

と計算できます[2] (ベクトル $(1, 0)$ と $(0, 1)$ とは直交するので $(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$ となることや, $(1, 0) \cdot (1, 0) = |(1, 0)|^2 = 1$ などに注意). つまり, x 成分同士, y 成分同士をかけあわせて, その和をとれば良いわけです. 例えば,

$$(1, 2) \cdot (3, 4) = 3 + 8 = 11, \qquad (-1, 2) \cdot (2, 1) = (-2) + 2 = 0,$$
$$(-1, -2) \cdot (4, 3) = (-4) + (-6) = -10,$$

等々と計算できます. 慣れてくれば暗算でできるようになると思います.

[2] 講義の時にはこの部分をちょっと分かりにくく説明してしまいました. 申し訳ありません. ちなみに, 教科書ではこの部分は $|\vec{b} - \vec{a}|^2$ を内積で表したものを使って説明されています. それも面白い.

このようにして成分表示だけで内積を計算すると, 逆にそれを使って二つのベクトルのなす角がだいたいどれくらいかを知ることができます. 最初の「内積の定義」のところで書いたことを思い出してください. 例えば, 上の三つの例でいうと, $(1,2)$ と $(3,4)$ のなす角は鋭角, $(-1,-2)$ と $(2,1)$ は直交, $(-1,-2)$ と $(4,3)$ のなす角は鈍角であることが分かります. もう少し精密に求めたい場合は, 内積の定義を書き換えた

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

という式を使って $\cos\theta$ を求めた後, 三角比の表と照らしあわせるなどして θ がどれくらいかを求めることができます.

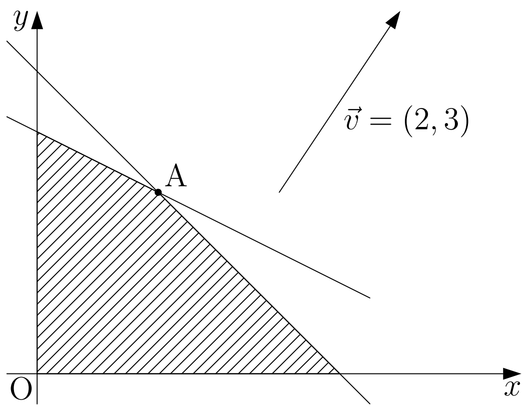
線形計画法と内積. 成分表示による内積の計算を非常にうまく使っているのが線形計画法です. みなさんはおそらく 2 年生くらいになると「最適化」の授業で教わると思います. ちょっと余談になりますが, 例えば, 次のような線形計画法の問題を考えてみましょう.

問題. 連立線形不等式 $0 \leqq x, \quad 0 \leqq y, \quad 100x + 100y \leqq 500, \quad 100x + 200y \leqq 800$ を満たす (x, y) のうち, $2x + 3y$ が最大になるものを一つ求めよ.

一般に, 連立線形不等式の解全体を座標系に図示すると凸多角形 (3 次元以上の場合は凸多面体) になるのですが, 今の場合, 右図の斜線部のようになります. 最大にしたい (x, y) の関数 $2x + 3y$ のことを「目的関数」と呼びますが, 線形計画法における目的関数は

$$2x + 3y = (2,3)\cdot(x,y)$$

と, 内積の形に書くことができます.



ここで, 「方向成分をとりだす」という内積の機能を思い出すと, 斜線部の範囲のうち, 位置ベクトルの $\vec{v} = (2,3)$ 方向の成分が最大になるような点を求めれば良いことがわかります. ひらたく言えば, $\vec{v}$ **方向を上にして図を眺めてみたときに一番上にくる点**が正解です. この場合, 図で点 A と書いてあるところが正解 (最適解) になります[3].

この問題に限らず, 線形計画法で最適解を一つ探したいときには, 凸多面体の内部の点を試す必要はなくて, 端っこの**頂点だけを探せば見つかる**わけです. 最適解を探すのに「単体法」というテクニックがあるのですが, それはこの考え方を基本とする手法です.

[3]ちなみに, 矢野・石原「基礎の数学」という本を持っている人は pp. 126–127 をみてみてください.