

単位ベクトル/位置ベクトル

単位ベクトル

大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**といいます。例えば,

$$(1, 0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (0, 1), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

などは単位ベクトルです。一般に, あるベクトル \vec{v} ($\neq \vec{0}$) が与えられたとき, \vec{v} と同じ向きの単位ベクトルを作るには, スカラー倍して,

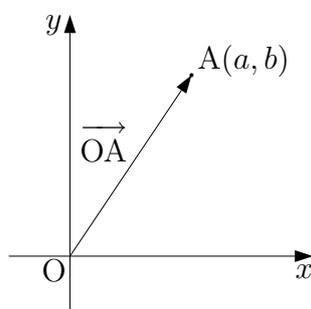
$$\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \quad (= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \dots \text{のようにも書く})$$

とします。スカラー倍の定義により, これは「向きが \vec{v} と同じで, 大きさは $1/|\vec{v}|$ 倍のベクトル」ですから, 大きさは丁度 1 になるわけです。

単位ベクトルという名称には「その向きの単位となるベクトル」というような意味がこめられています。例えば, $(1, 0)$ は x 軸方向の単位となるベクトル, $(0, 1)$ は y 軸方向の単位となるベクトル, というような役割をもちます。後でお話しする内積には「方向成分をとりだす」という機能があるのですが, そのときに単位ベクトルが用いられます。

位置ベクトル

位置ベクトルの定義. 座標系に点 A があったときに, A の **位置ベクトル**を, 座標系の原点を O とするときの \overrightarrow{OA} として定義します。



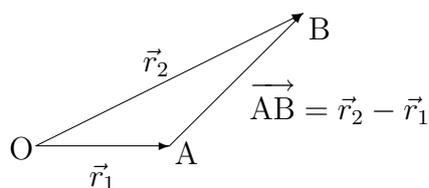
点 A の座標を (a, b) とすると, これがそのまま A の位置ベクトルの成分表示となります:

$$\overrightarrow{OA} = (a, b).$$

位置ベクトルというのは位置の情報をベクトルで表すためのもので、始点は常に座標系の原点にとります。特に、ベクトルを幾何学に应用するとき位置ベクトルをよく使いますが、それについては6月ごろの講義でいくつかの例をお話します。

位置ベクトルと変位ベクトル. 位置の情報をベクトルで表す利点は、他の意味を持つベクトルと位置の情報とを関連づけて論じることができる、ということにあります。例えば、一般の変位ベクトルを、位置ベクトルを使って表すことができます。

座標平面の点 A, B について、A の位置ベクトルを $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$, B の位置ベクトルを $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}$ とするとき、この二つのベクトルと \overrightarrow{AB} とを描いてみましょう:



ここで、「ベクトルの差」のところでお話したことを思い出して欲しいのですが、 \overrightarrow{AB} は、実は $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ と一致しています。つまり、変位ベクトルは、終点の位置ベクトルから始点の位置ベクトルを引いたものになっているわけです。だから、A の座標が (a, b) , B の座標が (c, d) だったとすると、 \overrightarrow{AB} の成分表示は

$$\overrightarrow{AB} = (c, d) - (a, b) = (c - a, d - b)$$

となるわけです。

ここで、前回のプリントの「オマケ」で点線の矢印として書いた部分をちょっと説明します。質点が A から B へ移動したときのことを考えてみます。質点が A を出発したときの時刻を t_1 , B に着いたときの時刻を t_2 とすると、移動には $\Delta t = t_2 - t_1$ の時間がかかったこととなります。このときの位置の変位を $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ と書くとき、これを $1/\Delta t$ 倍したベクトル

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

は、いわば「平均速度」と呼ぶべきものになります。もし質点の運動が等速直線運動であったなら、これは速度そのものです。

ただし一般には、速度というのは刻々と変化するものです(自動車のスピードメーターを見ていればわかると思いますが)。そういう場合の速度をとらえるには、変化する位置ベクトルを微分するという操作が必要になるわけですが、それはこの講義の範囲を大きく超えてしまいますので、ここでは「いずれ勉強する学習課題」として心に留めておいてください。