平面のベクトル

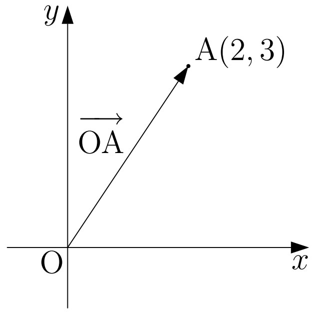
1 ベクトルとは何か?

力学で登場する物理量には, 質量, (位置の) 変位, 距離, 時間, 速度, 運動量, 加速度, 力, 等々がありますが, そのような量のうち, 大きさだけをもつものは**スカラー**, 大きさと向きをもつものは**ベクトル**と呼ばれます. 今挙げた物理量の例をスカラーとベクトルに分類しますと,

スカラー: 距離, 時間, 質量;
ベクトル: (位置の) 変位, 速度, 運動量, 加速度, 力;

となります. ここでは変位を例にとってベクトルとはどのようなものか説明したいと思います[1].

平面座標系で, ある質点が点 O$(0,0)$ から点 A$(2,3)$ まで移動したとします.



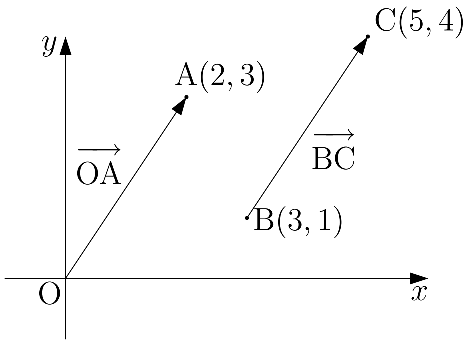
このときの質点の位置の変化 (経路は問わない) を表す量を「(位置の) 変位」といいます. まず, 位置の変化を表すには二点 O, A 間の距離の情報が必要ですから, 変位は大きさをもちます. しかし, 距離だけではどう変化したのかは完全にはわかりません. O から A へ向かう「向き」の情報を加味することではじめて変位を表すことができます. よって, 変位はベクトルとなります. このベクトルを, 点 O から点 A まで移動したときの変位, という意味で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と書きます. 点 O をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の**始点**, 点 A をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の**終点**といい, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を座標系に描くときは始点から終点に向けての矢印 (有向線分) として描きます. また, このベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の**大きさ**は O, A 間の距離, 言いかえると線分 OA の長さであり, この値を $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ と書きます. この場合, ピタゴラスの定理により,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$

[1] ベクトルで表される物理量にはいろいろあるのに, なぜ変位を例にとるのかというと, ベクトルの数学的な扱いや図形的なイメージは, 位置の変位を表すベクトルを基本とするとわかりやすいからです.

となります. 同様に, ベクトルを座標系に描くときには (変位を表すベクトルでなくても), 常に長さが大きさに対応するように描きます.

ここでもう一つ, 点 B(3,1) から点 C(5,4) まで移動したときの変位 (ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$) を考えてみましょう.



このとき, 移動している場所は異なりますが, “ 位置の変化のしかた ” という視点でみるとどうでしょうか? この場合, 「x 軸方向には 2 だけ, y 軸方向には 3 だけ移動した」という意味では変位は等しいと考えます. ベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は等しいわけです:

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}.$$

教科書のはじめに書いてある「ベクトルの定義」に「…位置を問題にしないで…」とありますが, これはこういうことです. 例えば, 「自動車 X と自動車 Y が同じ速度で走っている」というときに, 「X が走っている」という現象と「Y が走っている」という現象は違っても, それぞれの現象に関する「速度」という量は同じ, ということと似たような感覚です. つまり, 「O から A へ移動した」という現象と, 「B から C へ移動した」という現象は違っても, それぞれの現象に関する「変位」という量は同じ, というわけです.

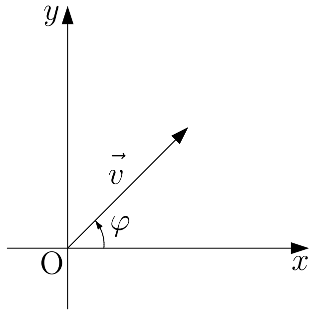
これでだいたいベクトルとはどのようなものか, 分かったでしょうか? 次に, 「ベクトルをどうやって数学的に表すか」という問題を考えてみたいと思います.

2　ベクトルの表し方

ベクトルを表す記号としては (スカラーと区別するために) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ のように太文字を用いたり, $\vec{v}, \vec{w}$ のように上に矢印をつけたものを用いることが多いです. ただ, これからお話したいのは, このような記号の問題ではなくて, ベクトルの大きさと向きをどういう数値でどのように数学的に表せば良いか? という問題です.

2.1　大きさと角度で表す

ベクトルは大きさと向きをもつ量ということですから, とりあえず素朴に思いつく方法としては,「向き」を角度で表して,「大きさ」と「角度」を使って表現する方法があります. 角度としては, x 軸から左回りに計った角度を使うことが多いです.



そうすると, 大きさ $|\vec{v}|$ と角度 φ を指定してやればベクトル $\vec{v}$ を定めることができます (ただし, これは $|\vec{v}| \neq 0$ の場合のこと. $|\vec{v}| = 0$ の場合はゼロベクトル (後述) といって, 角度に意味はなくなります). なお, これは平面ベクトルなので角度の情報は一つで済みましたが, 空間ベクトルの場合は角度の情報は二つ必要になります.

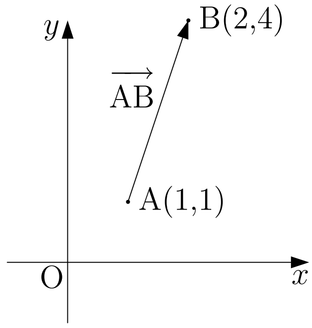
しかし, この方法には下の例以外では特に決まった書き方というものはなく,「ベクトルを表す方法」としてはほとんど用いられません (次の節で説明する**成分表示**に比べると使いにくいので). ただ, こういう視点でベクトルをとらえることはそれなりに重要なので, 頭の片隅にでも入れておいてください. とくにこの考えが重要になるのは, 電気回路で正弦波交流電流や正弦波交流電圧に対応するベクトルを表す場合です. 例えば, 最大値が E で初位相が φ の正弦波交流電圧 ($v(t) = E\sin(\omega t + \varphi)$) に対応するベクトル (フェーザ) を,

$$E\angle\varphi$$

と書いて, 大きさが E で, x 軸からの角が φ となるベクトルとして表すことがあります. (といっても, これに対応する複素数で表示することの方がもっと多いのですが.) これについては, いずれ交流回路を考えるときに勉強すると思います.

2.2　成分表示

もう一つの方法は成分表示です. ほとんどの場合, ベクトルを表すにはこちらがよく用いられます. 点 $\mathrm{A}(1,1)$ から点 $\mathrm{B}(2,4)$ に移動したときの変位ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を考えてみます.



このとき, 変位を x 軸方向のもの (x **成分**) と y 軸方向のもの (y **成分**) に分解して[2], 「x 軸方向に 1, y 軸方向に 3 進んだときの変位」と思い,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1, 3)$$

と書きます. これが成分表示です. もう一つ例を出しますと, 点 $\mathrm{O}(0,0)$ から点 $\mathrm{C}(3,2)$ に移動したときの変位 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を考えれば, x 成分は 3, y 成分は 2 となり, 成分表示は $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (3,2)$ となるわけです. 変位以外の量を表すベクトルについても, 同様に成分表示が用いられます.

成分表示は扱いやすく, 一般化しやすいのでよく用いられるわけですが, あえて難を言うとすれば, ベクトルの大きさや向きの情報が表面に出てこない, というのが玉に瑕でしょうか. とはいえ, それらの情報は成分表示から読み取ることができます. 例えば, $\vec{v} = (a, b)$ と成分表示されたベクトルを考えると, その大きさは, ピタゴラスの定理より,

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

と計算できます. x 軸からの角度 φ は, ちょっと難しくなりますが, $a \neq 0$ ならば

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}, \quad a > 0 \text{ のとき } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad a < 0 \text{ のとき } \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

となるような φ を探せばよくて, $a = 0$, $b > 0$ ならば $\varphi = \pi/2$ とすればよく, $a = 0$, $b < 0$ ならば $\varphi = -\pi/2$ とすればよく, $a = 0$, $b = 0$ ならばゼロベクトルになります.

逆に, 大きさが E, x 軸からの角度が φ のベクトルの成分表示は, 三角比を使って,

$$E\angle\varphi \qquad \xrightarrow{\text{成分表示}} \qquad (E\cos\varphi, E\sin\varphi)$$

と表されます. 大きさと角度で表す方法と成分表示とは同等の情報を与えるものであって, 従って, このように相互に変換できるわけです.

[2] この「分解」ということをもう少し厳密に述べるには, 本当はもう少し準備が必要です (教科書の pp. 7–9). この講義では空間ベクトルについてお話する時に, 再度この点に触れる予定です.