

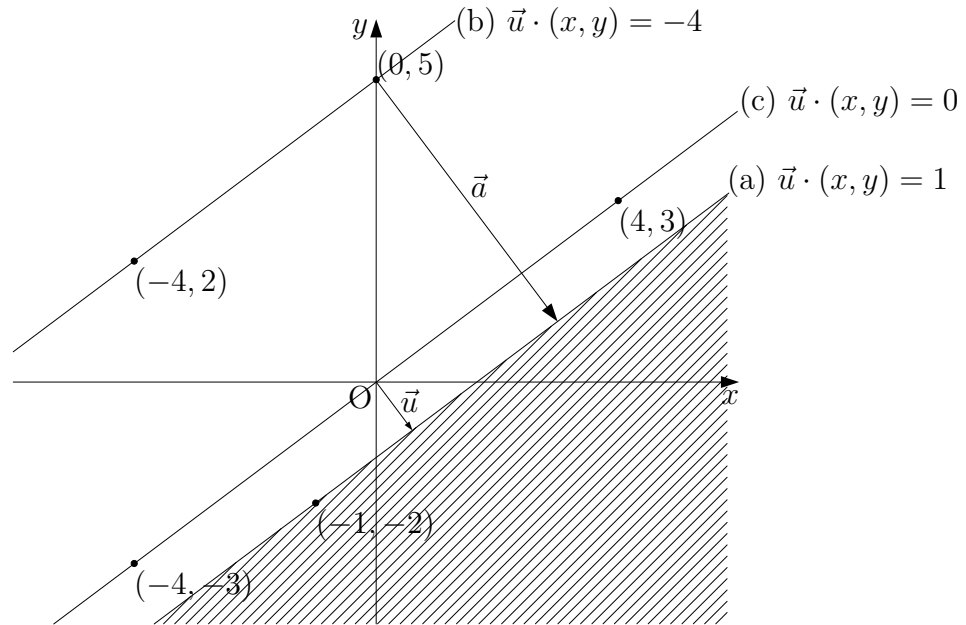
演習問題 (6月~7月) の解答例

1. (1) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ だから,

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

(2) (i) 5 (ii) 5 (iii) 1 (iv) -20 (v) -20 (vi) -4 (vii) 0 (viii) 0 (ix) 0

(3)(4) (a) $\vec{a} \cdot (x, y) = 5$ (b) $\vec{a} \cdot (x, y) = -20$ (c) $\vec{a} \cdot (x, y) = 0$ に注意. また, 点 $(0, 5)$ を始点として \vec{a} を描けば, 終点は $(3, 1)$ になる.



※ このとき \vec{a} や \vec{u} などが直線 (a)~(c) の法線ベクトルと呼ばれるわけです.

(5) 求めたいのは, 点 $(-4, -3)$ と直線 (b) との距離で, 上図を見ると \vec{u} の長さ 4 つ分であることを見て取ることができるわけです. だから正解は 4. これを「点と直線との距離の公式」で求めるなら, 次のようにする:

$$\frac{|\vec{a} \cdot (-4, -3) - (-20)|}{|\vec{a}|} = \frac{|0 - (-20)|}{5} = 4.$$

これは, $|\vec{u} \cdot (-4, -3) - (-4)| = |0 - (-4)| = 4$ を計算しているのと同じことです. 位置ベクトルの \vec{u} 方向の成分の差を考えているわけです. 点 $(-4, -3)$ から \vec{u} 方向に -4 だけ進む (4 だけ後退する) と直線 (b) に到達する.

(6) 今度は点 $(5, 5)$ と直線 (a) との距離です. やはり \vec{u} の長さいくつ分にあたるのか? と考えてみてください. $\vec{u} \cdot (5, 5) = -1$ だから, 点 $(5, 5)$ は直線 $\vec{u} \cdot (x, y) = -1$ 上にあるわけです. 直線 (a) $\vec{u} \cdot (x, y) = 1$ だから, 答えは,

$$|\vec{u} \cdot (5, 5) - 1| = |-1 - 1| = 2.$$

やはり位置ベクトルの \vec{u} 方向の成分の差を考えています. 点 $(5, 5)$ から \vec{u} 方向に 2 だけ進むと, 直線 (a) に到達する.

あるいは, (a) $\vec{a} \cdot (x, y) = 5$ に「点と直線との距離の公式」を適用して,

$$\frac{|\vec{a} \cdot (5, 5) - 5|}{|\vec{a}|} = \frac{|(15 - 20) - 5|}{5} = 2.$$

(7) 点 $(-1, -2)$ を通り, ベクトル $(4, 3)$ に平行な直線なので, 媒介変数表示は

$$\vec{r} = (-1, -2) + t(4, 3) \quad (t \text{ は実数})$$

となる. 正解はこれだけでなく, $\vec{r} = (3, 1) + t(4, 3)$ とか $\vec{r} = (3, 1) + t(-4, -3)$ などとしても良いです. $(4, 3)$ が \vec{a} に直交するベクトルなので, t がどんな値であっても $\vec{a} \cdot \vec{r} = 5$ となることを確認しておいてください. この $(4, 3)$ のようなベクトルをこの直線の**方向ベクトル**ということがあります.

2. (1) $\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$ (2) $(-2, 6, 4)$ (3) $2\sqrt{14}$ (4) $(-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}})$

(5) 1 (6) 14

3. (1) $(-1, 5, 0)$ (2) $(-8, 1, 13)$ (3) $(1, 4, -3)$

4. (1) 1 (2) -3 (3) 2 (4) 0 (5) 3 (6) 9

5. (1) 鋭角 (2) 鈍角 (3) 鋭角 (4) 直角 (5) 鋭角 (6) 鋭角

6. (1) $\vec{a} \cdot (-2, 1, -1) = 3$ なので, 求める平面の方程式は $-2x + y + 2z = 3$. または, $-2(x+2) + (y-1) + 2(z+1) = 0$ などとしても良いです.

(2) $\vec{u} = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

(3) 平面の方程式を $\vec{u} \cdot (x, y, z) = 1$ と考えて, $|\vec{u} \cdot (5, -1, -2) - 1| = |-5 - 1| = 6$, または, $\vec{a} \cdot (x, y, z) = 3$ に「点と平面との距離の公式」を適用して,

$$\frac{|\vec{a} \cdot (5, -1, -2) - 3|}{|\vec{a}|} = \frac{|(-10 - 1 - 4) - 3|}{3} = 6$$

で, どちらで計算しても正解は 6.

7. 例えば $(3, 2, -1)$ (これに平行なベクトルなら何を答えても正解).

8. 中心は $(1, -3, 2)$, 半径は 3.

9. (1) $(7, -9, 5)$ (2) $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 3, 4)$ で, 外積 $(7, -9, 5)$ はこの二つに直交するベクトル. だから, ベクトル $(7, -9, 5)$ に垂直で, 点 $(0, 1, 0)$ を通る平面の方程式を求めればよい. 答えは, $7x - 9y + 5z = -9$.