線形代数 II(担当: 天野勝利)　　2007 年 1 月 16 日

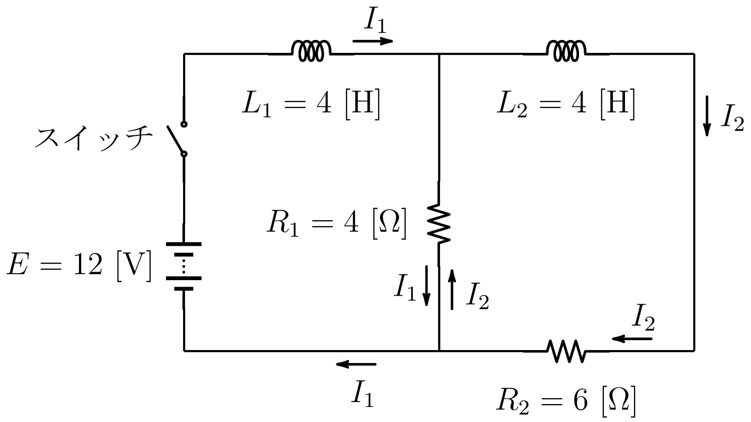
固有値・固有ベクトルの応用 (微分方程式)

1　はじめに

この講義では最後に固有値の応用例として 2 次曲線の分類についてお話したわけですが, 実用上もっと重要な例としては, 微分方程式への応用があります. それについてはお話できなかったので, 最後にプリントで具体的な応用例をひとつ紹介することにします.

2　直流 RL 回路の過渡現象

以下は Kreyszig の本 [1] (参考文献を参照) の §3.1 に書いてある例を少し変えた (コンデンサの部分をコイルにとりかえた) ものです. 次のような問題を考えてみます:



上記の回路で, 時刻 $t = 0$ にスイッチを入れたときの電流 $I_1(t)$, $I_2(t)$ [A] を求めよ. ただし, スイッチを入れる前の回路中の電流はすべてゼロとする.

「電流 $I_1(t)$, $I_2(t)$ を求めよ」というのは, これらを t の関数として具体的に表せ, という意味です. スイッチを入れた直後, コイル L_1 と L_2 には自己誘導によりそれぞれ $4I_1'$, $4I_2'$ [V] の逆向きの起電力が発生するので, このこととキルヒホッフの第二法則を使って微分方程式を立ててみます.

まず, 左側のループにキルヒホッフの第二法則を適用すると,

$$4I_1' + 4(I_1 - I_2) = 12 \quad \Leftrightarrow \quad I_1' = -I_1 + I_2 + 3$$

が得られます. 右側のループについては,

$$4I_2' + 6I_2 + 4(I_2 - I_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_2' = I_1 - 2.5I_2$$

となります．この二つをあわせて，

$$\begin{cases} I_1' = -I_1 + I_2 + 3 \\ I_2' = I_1 - 2.5I_2 \end{cases}$$

という微分方程式が立てられます．これを行列で表示してみます．

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，上の微分方程式は

$$\mathbf{J}' = A\mathbf{J} + \mathbf{g} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と書けます．(後で参照するのでこの方程式に ① と番号をつけておきます．) 実は，このような微分方程式には A の固有値・固有ベクトルを使う，ある解き方があるのです．それを段階を追って説明しましょう．

同次方程式[1]の解を求める．上記の ① は非同次 (または非斉次) 方程式と呼ばれる形なのですが，それを解くために，関連する以下のような (同次) 微分方程式を解きます:

$$\mathbf{J}_h' = A\mathbf{J}_h. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

固有値・固有ベクトルは，この同次方程式を解くために使うのですが，それには，まず，

$$\mathbf{J}_h = \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \mathbf{x}e^{\lambda t} \qquad \left(\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, x_1, x_2 \text{ は定数}\right)$$

という形の解がないかどうかを調べます．このような解 $\mathbf{J}_h$ があったとすると，それは

$$\mathbf{J}_h' = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t} = A\mathbf{x}e^{\lambda t}$$

をみたす必要があるので，

$$\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

を満たさねばならない．つまり，λ は A の固有値，$\mathbf{x}$ は固有ベクトルである必要があるわけです．

A の固有方程式は，

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 2.5 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2.5) - 1 = \lambda^2 + 3.5\lambda + 1.5 = (\lambda+0.5)(\lambda+3) = 0$$

となるので，固有値は $\lambda = -0.5, -3$ となります．

[1]斉次方程式ともいう

$\lambda=-0.5$ に対する固有ベクトルを求めると,

$$0.5x_1-x_2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c:\text{ 定数})$$

となって, $\lambda=-3$ に対する固有ベクトルは,

$$-2x_1-x_2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (c:\text{ 定数})$$

となるので, これらを使って, 同次方程式 ② の一般解

$$\mathbf{J}_h=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-0.5t}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-3t} \qquad (c_1,c_2:\text{ 定数})$$

が得られます.

特殊解を求める. 上で求めた解 $\mathbf{J}_h$ を使って, もとの方程式 ① の解を求めます. 今度は

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_h+\mathbf{a}, \qquad \left(\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad a_1,a_2\text{ は定数}\right)$$

という形の解がないかどうか調べます. $\mathbf{a}$ のみたすべき条件を求めると,

$$\mathbf{J}'=\mathbf{J}_h'=A\mathbf{J}_h=A\mathbf{J}+\mathbf{g}=A\mathbf{J}_h+A\mathbf{a}+\mathbf{g}$$

より,

$$A\mathbf{a}+\mathbf{g}=\mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a_1+a_2=-3 \\ a_1-2.5a_2=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a_1=5, \quad a_2=2$$

とすればよいことが分かります. よって, 方程式 ① の一般解として

$$\mathbf{J}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-0.5t}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-3t}+\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (c_1,c_2:\text{ 定数})$$

が得られます. これを書き直すと,

$$\begin{cases} I_1(t)=2c_1e^{-0.5t}+c_2e^{-3t}+5 \\ I_2(t)=c_1e^{-0.5t}-2c_2e^{-3t}+2 \end{cases}$$

となります. ここで, 初期条件 $I_1(0)=I_2(0)=0$ から c_1,c_2 を求めると,

$$\begin{cases} 2c_1+c_2+5=0 \\ c_1-2c_2+2=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1=-2.4, \quad c_2=-0.2$$

となるので, 求める電流は,

$$\begin{cases} I_1(t) = -4.8e^{-0.5t} - 0.2e^{-3t} + 5 \\ I_2(t) = -2.4e^{-0.5t} + 0.4e^{-3t} + 2 \end{cases}$$

となるわけです. t が大きくなると, 指数関数の部分は無視できるくらいに小さくなっていってしまうので, だんだん I_1 は 5 [A] の定常電流になり, I_2 は 2 [A] の定常電流になっていきます (本当はグラフを描いたほうが良く分かるのですが).

スイッチを入れてからすぐの状態では電流の変化があるのでコイルに自己誘導が起こるわけですが, だんだん電流が安定してきて一定になっていく, というわけです.

3　参考文献について

下の参考文献は, 今後さらに勉強を進めたい時に[2]個人的にお勧めできる本, ということで少し挙げてみました. [1] は, 線形代数だけの本ではなくて, 微分方程式, フーリエ解析, 確率統計, 等々, 実用上重要と思われる数学が網羅されている, 定評のある名著です. 記述は丁寧で分かりやすく, 応用例も豊富に載っています. その和訳が分冊で出ているのですが, [2] と [3] はそのうちの 2 冊です. 和訳の方は今手元にないのですが, このプリントで引用した部分は [2] に載っていると思います.

[4] は, 以前にもちょっとだけ紹介しましたが, 「コンピュータに関わる人にピンとくるような記述」を旨として書かれたという大変ユニークな本です. 行列式の幾何的な意味などが直感的に書かれていて分かりやすいのが特徴的です. 固有値の応用については, 微分方程式になじみのない読者にも配慮して, 離散時間システム (差分方程式) についても書かれています.

参考文献

[1] E. Kreyszig, “Advanced Engineering Mathematics”, 8th edition[3], Wiley, 1999.

[2] E. クライツィグ 著, 北原和夫・堀素夫 訳「常微分方程式」培風館.

[3] E. クライツィグ 著, 堀素夫 訳「線形代数とベクトル解析」培風館.

[4] 平岡和幸・堀玄 著「プログラミングのための線形代数」オーム社.

[2]あるいは, 私の拙い講義ではよく分からなかった, という時に…

[3]このプリントを書いているときに直接参照したのが 8th edition という意味ですが, 現在の最新版は 9th edition のようです. amazon のホームページで調べたらペーパーバック版が 6000 円くらいでした.