D-加群代数の Picard-Vessiot 理論における Liouville 拡大

2009年1月30日, 第２回つくば代数学ワークショップ

天野勝利 (筑波大学数理物質科学研究科)

概略

1. Liouville 拡大とは？
   (ordinary differential case)
2. D-加群代数の PV 理論 (要点のみ)
3. 今回のポイント
4. アルチン単純 D-加群代数の Liouville 拡大

1. Liouville 拡大とは？

古典 Galois 理論でいうところの「冪根拡大」にあたる.

1.1. 定義

$$(K,\partial) \text{ が微分体 } :\Leftrightarrow \begin{cases} K : \text{体}, \\ \partial : K \to K \quad \text{additive}, \\ \partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b) \\ \qquad\qquad \text{for } \ {}^{\forall}a, b \in K. \end{cases}$$

$K^{\partial} := \{a \in K \mid \partial(a) = 0\}$ 定数体 (constants)

簡単のため１章では K^{∂} は標数 0 の代数閉体と仮定する.

L/K : 微分体の拡大が <u>Liouville 拡大</u> とは, $L^{\partial} = K^{\partial}$ かつ中間微分体の列 $K = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_r = L$ があって各 L_i/L_{i-1} $(i = 1, \ldots, r)$ が次のいずれかの形をしていることをいう:

(a) 有限次代数拡大,

(b) $L_i = L_{i-1}(x)$, $\partial(x) = {}^{\exists}a \in L_{i-1}$ $(x = \int a)$,

(c) $L_i = L_{i-1}(x)$, $\partial(x)x^{-1} = {}^{\exists}a \in L_{i-1}$ $(x = e^{\int a})$.

1.2. 可解性定理

命題. L/K を PV 拡大, $G(L/K)$ をその微分 Galois 群, $G(L/K)^\circ$ をその identity component とすると,

(a) $L^{G(L/K)^\circ}$ は L の中における K の代数閉包. とくに, L/K が有限次代数拡大 $\Leftrightarrow$ $G(L/K)$ が (離散) 有限群.

(b) $L = K(x)$, $\partial(x) \in K \Leftrightarrow G(L/K) = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$.

(c) $L = K(x)$, $\partial(x)x^{-1} \in K \Leftrightarrow G(L/K) \hookrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

定理. L/K を PV 拡大, $G(L/K)$ をその微分 Galois 群とすると, 次は同値:

(i) L/K が Liouville 拡大.

(ii) ある Liouville 拡大 $\tilde{L}/K$ が存在して $L \subset \tilde{L}$.

(iii) $G(L/K)^\circ$ が可解代数群.

(iv) $G(L/K)^\circ$ が三角化可能代数群.

(v) ある閉部分群の normal chain

$$G(L/K)^\circ = G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_r = \{1\}$$

があって, 各 G_i/G_{i-1} $(i = 2, \ldots, r)$ は $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ または $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

※ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) は Lie-Kolchin の三角化可能定理

2. D-加群代数の PV 理論

・微分 PV 理論を, 差分 PV 理論や正標数の場合を含むように統一・拡張した.

・D はある余可換な Hopf 代数.

2.1. Hopf 代数とは？

k を体とし, 以下すべて k 上で考える.

A : algebra と algebra map $\Delta : A \to A \otimes_k A$, $\varepsilon : A \to k$ と anti-algebra map $S : A \to A$ があって, 次の (1)–(3) を満たすとき, $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ を Hopf 代数という.

(1) 次が可換:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \mathrm{id}\otimes\Delta \\ A \otimes A & \xrightarrow{\Delta\otimes\mathrm{id}} & A \otimes A \otimes A \end{array}$$

(2) 次も可換:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\sim"] & \\ k \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & A \otimes k \end{tikzcd}$$

(3) $a \in A$ に対して $\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2$ と書くとき, $\sum S(a_1)a_2 = \sum a_1 S(a_2) = \varepsilon(a) \quad ({}^\forall a \in A)$.

例. (affine group scheme の座標環)

A が可換 Hopf 代数 のとき, $\mathbb{G} = \operatorname{Spec} A$ として, Δ, ε, S に対応する scheme morphism

$\Delta^* : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $\varepsilon^* : \{1\} \to \mathbb{G}$, $S^* : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$

を考えて可換図式を書き換えてみると, これらがそれぞれ群の積, 単位元, 逆元を与える morphism として群の公理を満たしていることがわかる. affine group scheme と可換 Hopf 代数とは同等な概念である.

例. (余可換な Hopf 代数の代表例)

Hopf 代数 A が, $\sum a_1 \otimes a_2 = \sum a_2 \otimes a_1$ ($^\forall a \in A$) を満たすとき, 余可換という. (A が可換かつ余可換なら $\operatorname{Spec} A$ は abelian group scheme となる.)

(1) G を任意の群, $A = kG$ (群環) とし, Δ, ε, S を $g \in G$ に対して $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ となるように定めると, A は余可換な Hopf 代数になる. (特に $G = \mathbb{Z}$ のとき, A は定数係数の差分作用素環と同一視できる.)

(2) $\mathfrak{g}$ を任意の Lie 環, $A = U(\mathfrak{g})$ とし, Δ, ε, S を $h \in \mathfrak{g}$ に対して $\Delta(h) = 1 \otimes h + h \otimes 1$, $\varepsilon(h) = 0$, $S(h) = -h$ となるように定めると, A は余可換な Hopf 代数になる.

2.2. 作用素の環

D : 余可換な Hopf algebra

$$A \text{ が (左) } D\text{-加群代数} :\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ は algebra}, \\ \text{(左) } D\text{-加群構造 } D \otimes_k A \to A, \\ d(ab) = \sum (d_1 a)(d_2 b),\ d \cdot 1 = \varepsilon(d) 1 \\ \qquad \text{for } \ ^\forall d \in D,\ ^\forall a, b \in A. \end{cases}$$

V を D-加群とするとき,

$$V^D := \{ v \in V \mid dv = \varepsilon(d) v \ (^\forall d \in D) \}$$

を V の constants と呼ぶ.

<u>例.</u> (1) $\mathrm{ch}(k) = 0$, $D = k[\partial]$

$\Delta(\partial) = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial$, $\varepsilon(\partial) = 0$, $S(\partial) = -\partial$

このとき, A が可換 D-加群代数 $\Leftrightarrow$ A は微分代数.

実際, A が D-加群代数なら,

$$\partial(ab) = (\partial a) b + a (\partial b) \quad (a, b \in A).$$

(2) $D = k[\tau, \tau^{-1}]$

$\Delta(\tau) = \tau \otimes \tau$, $\varepsilon(\tau) = 1$, $S(\tau) = \tau^{-1}$

このとき, A が可換 D-加群代数 $\Leftrightarrow$ A は差分代数.

(3) $D = \bigoplus_{n \geq 0} k\partial^{(n)}$, $\partial^{(n)}\partial^{(m)} = \begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} \partial^{(n+m)}$,

$\Delta(\partial^{(n)}) = \sum_{i+j=n} \partial^{(i)} \otimes \partial^{(j)}$, $\varepsilon(\partial^{(n)}) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n>0), \end{cases}$

$\mathrm{S}(\partial^{(n)}) = (-1)^n \partial^{(n)}$

A を可換 D-加群代数とすると, $\{\partial^{(n)}\}$ は A に higher derivation として作用

仮定.

(i) D は pointed ($\Rightarrow D = D^1 \# kG$).

ここで, $\begin{cases} D^1 \text{ は } 1 \text{ を含む } D \text{ の irreducible component}, \\ G = G(D) : \text{grouplike elements からなる群} \end{cases}$

※ $g \in D$ が groupline $:\Leftrightarrow \Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$.

(ii) D^1 は Birkhoff-Witt bialgebra (higher derivation を一般化したようなもの) になっている.

k が標数 0 の代数閉体ならばこれらは常に成立する.

2.3. アルチン単純 (AS) D-加群代数

以下, D-加群代数はすべて可換代数とする.

定義. K : D-加群代数のとき,

- K が単純 :⇔ K に non-trivial な D-stable ideal が存在しない
  (⇔ K が ${}_{K\#D}\mathcal{M}$ の simple object).
- K がアルチン単純 (AS) :⇔ K がアルチン環かつ単純.

命題. K が AS D-加群代数のとき,

(1) K^D は体.

(2) $K = \displaystyle\prod_{g \in G/G_1} K_g$ (体の直積), 各 K_g はすべて体同型.

ここで, $G = G(D)$ は D の grouplike element 全体からなる群で, G_1 は, K の素 ideal P を一つ fix したときに $G_1 = \{g \in G | gP = P\}$ により定まる G の部分群.
このとき $[G : G_1] < \infty$.

2.4. PV 拡大と Galois 対応

<u>定義</u>. (1) L/K : AS D-加群代数の拡大が PV 拡大とは,

(i) $L^D = K^D$,

(ii) $L \supset {}^{\exists}A$: 部分 D-加群代数

$$\text{s.t.} \begin{cases} A \supset K, \\ L \text{ は } A \text{ の total quotient ring}, \\ A \otimes_K A = A \cdot (A \otimes_K A)^D \end{cases}$$

($A \otimes A$ の D-加群構造は $d(a \otimes b) = \sum d_1 a \otimes d_2 b$ により入れる.)

※ L/K が PV 拡大のとき, 上記の A は L/K に対して一意的に定まる. (van der Put-Singer の用語ではこの A は "Picard-Vessiot ring" にあたる.)

※ 従来の意味での PV 拡大は, こちらの意味では finitely generated (後述) な PV 拡大と同値な概念となる. 無限個の PV 拡大たちの inductive limit をとっても上記の定義を満たすので, 例えば universal PV 拡大なども我々の意味では PV 拡大の範疇に含まれる.

<u>定理.</u> (Galois 対応)

L/K : PV 拡大 のとき, $H = (A \otimes_K A)^D$ が K^D 上の可換 Hopf 代数の構造をもち,

$$\{\text{中間 AS } D\text{-加群代数}\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{H \supset I \quad \text{Hopf ideal}\}$$

$$(\overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\operatorname{Spec} H \text{ の closed subgroup scheme}\})$$

$\mathbb{G}(L/K) := \operatorname{Spec} H$ を PV group scheme と呼ぶ.

※ group functor として, $\mathbb{G}(L/K) \simeq \underline{\mathrm{Aut}}_D(A/K)$

$$\underline{\mathrm{Aut}}_D(A/K) : T \mapsto \mathrm{Aut}_D(T \otimes_{K^D} A / T \otimes_{K^D} K)$$

$$(T : \text{可換 } K^D\text{-algebra}).$$

特に, $\mathbb{G}(L/K)(K^D) = \mathrm{Aut}_D(A/K) = \mathrm{Aut}_D(L/K)$.

※ L/K が finitely generated

$\Leftrightarrow$ A が有限生成 K-algebra

$\Leftrightarrow$ H が有限生成 K^D-algebra

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{G}(L/K)$ が algebraic.

3. 今回のポイント

☆ 対象を AS D-加群代数の拡大にする.

Liouville 拡大の定義において, 条件 (b), (c) はわりと素直に拡張できる.

(a) がやや問題だが,「有限次代数拡大」を「環の (finite) separable 拡大」にすればOK

☆ 代数群でなく affine group scheme を使う.

正標数の PV 理論では non-reduced な group scheme も Galois 群として出てくる ($\mathbb{G}(L/K) = \alpha_p$ となる PV 拡大などが実際にある) ので, 代数群の枠組では不完全.

ところが, Lie-Kolchin の三角化可能定理が affine group scheme では一般には成立しないという問題がある (可解性定理で書いた (iii)(iv)(v) が同値にならない).

→(v) に相当する条件を満たすものを "Liouville group scheme" と呼ぶことにして, 可解性や三角化可能性と比較してどれくらい強いのかを調べた.

結論としては, connected algebraic affine group scheme に関して

$$\{\text{三角化可能}\} \subsetneq \{\text{Liouville}\} \subset \{\text{可解}\}$$

という関係で, 代数閉体上ならば $\{\text{Liouville}\}=\{\text{可解}\}$ となる (一般には $\neq$).

<u>例.</u> anisotropic torus は可解だが Liouville でない (ただし, base field を代数閉体に拡張すれば対角化可能になって Liouville).

※ 例えば $\sin x$, $\cos x$ は $\mathbb{R}$ 上では Liouville でないが, 定数体を $\mathbb{C}$ に拡張すれば Liouville になる, ・・・ という立場.

<u>例.</u> $k = \bar{\mathbb{F}}_2$ とし, SL_2 の closed subgroup scheme $\mathbb{G}$ を, 可換 k-algebra T に対して

$$\mathbb{G}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(T) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{11}^2 = 1,\ x_{22}^2 = 1, \\ x_{12}^2 = 0,\ x_{21}^2 = 0 \end{array} \right\}$$

として定めると, $\mathbb{G}$ は connected Liouville だが三角化可能でない.

4. AS D-加群代数の Liouville 拡大

4.1. (a)(b)(c) に相当する拡大

定義. L/K を AS D-加群代数の拡大とする.

(a) L/K が finite etale $:\Leftrightarrow$ L が separable K-代数.

(b) $x \in L$ が K 上 primitive

$$:\Leftrightarrow dx \in K \ ({}^{\forall}d \in D^{+} = \operatorname{Ker}\varepsilon).$$

(c) $x \in L$ が K 上 exponential

$$:\Leftrightarrow x \in L^{\times} \text{ かつ } (dx)x^{-1} \in K \ ({}^{\forall}d \in D).$$

L/K を AS D-加群代数の拡大とするとき, $x_1, \ldots, x_n \in L$ に対し, K と $x_1, \ldots, x_n$ を含む最小の部分 AS D-加群代数 in L を $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ と書く. 特に, 有限個の $x_1, \ldots, x_n$ によって $L = K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ と書けるとき, L/K は finitely generated であるという.

命題. L/K が finitely generated PV 拡大のとき,

(a) $\mathbb{G}(L/K)^\circ$ に対応する中間 AS D-加群代数は L の (finite) separable K-subalgebra のうち最大のものと一致する. 特に,

$$L/K \text{ が finite etale} \Leftrightarrow \mathbb{G}(L/K) \text{ が finite etale.}$$

(b) $L = K\langle x \rangle$, x は K 上 primitive

$$\Leftrightarrow \mathbb{G}(L/K) \hookrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{a}}.$$

(c) $L = K\langle x \rangle$, x は K 上 exponential

$$\Leftrightarrow \mathbb{G}(L/K) \hookrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}.$$

定義. L/K を finitely generated な AS D-加群代数の拡大とする. L/K が Liouville 拡大 とは, $L^D = K^D$ かつ中間 AS D-加群代数の列 $K = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_r = L$ があって各 L_i/L_{i-1} $(i = 1, \ldots, r)$ が次のいずれかの形をしていることをいう:

(a) finite etale,

(b) $L_i = L_{i-1}\langle x \rangle$, x は L_{i-1} 上 primitive,

(c) $L_i = L_{i-1}\langle x \rangle$, x は L_{i-1} 上 exponential.

4.2. Liouville group schemes

定義. $\mathbb{G}$ を algebraic affine group scheme とする．ある closed subgroup schemes の normal chain

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}_0 \rhd \mathbb{G}_1 \rhd \cdots \rhd \mathbb{G}_r = \{1\}$$

があって, 各 G_i/G_{i-1} $(i = 1, \ldots, r)$ が

- finite etale,
- $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ の closed subgroup scheme,
- $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の closed subgroup scheme,

のいずれかであるとき, $\mathbb{G}$ は Liouville であるという.

命題. $\mathbb{G}$ を algebraic affine group scheme とする.

(1) $\mathbb{G}$ が Liouville $\Leftrightarrow$ $\mathbb{G}^\circ$ が Liouville.

(2) $\mathbb{G}$ が connected Liouville $\Rightarrow$ $\mathbb{G}$ は可解.

(3) 代数閉体上では, $\mathbb{G}$ が Liouville $\Leftrightarrow$ $\mathbb{G}^\circ$ が可解.

4.3. 可解性定理

<u>**定理**</u>. L/K を AS D-加群代数の PV 拡大とすると, 次は同値:

(i) L/K が Liouville 拡大.

(ii) ある Liouville 拡大 $\tilde{L}/K$ が存在して $L \subset \tilde{L}$.

(iii) $\mathbb{G}(L/K)$ が Liouville.

もし K^D が代数閉体ならば, 上記はさらに次とも同値:

(iv) $\mathbb{G}(L/K)^\circ$ が可解.